

UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES LETTRES

LE

CONCEPT DU HASARD

DANS LA PHILOSOPHIE DE COURNOT

ÉTUDE CRITIQUE

THÈSE POUR LE DOCTORAT ÈS-LETTRES

Présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris

PAR

A. DARBON

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHILOSOPHIE AU LYCÉE DE BORDEAUX

BORDEAUX

IMPRIMERIE Y. CADORET

17, RUE POQUELIN-MOLIÈRE, 17

1910

A MON MAÎTRE E. DURKHEIM

En témoignage de ma vive reconnaissance.

LE
CONCEPT DU HASARD

DANS LA PHILOSOPHIE DE COURNOT

UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES LETTRES

LE

CONCEPT DU HASARD

DANS LA PHILOSOPHIE DE COURNOT

ÉTUDE CRITIQUE

THÈSE POUR LE DOCTORAT ÈS-LETTRES

Présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris

PAR

A. DARBON

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHILOSOPHIE AU LYCÉE DE BORDEAUX

BORDEAUX

IMPRIMERIE Y. CADORET

17, RUE POQUELIN-MOLIÈRE, 17

1910



INTRODUCTION

Cournot a entrepris de concilier l'idée du hasard avec celle d'un enchaînement rationnel et d'un déterminisme rigoureux. Il a cru en trouver le moyen dans l'hypothèse d'une indépendance absolue entre certaines séries collatérales de causes ou de raisons. Nous ne croyons pas toutefois qu'il ait complètement résolu le problème apparemment paradoxal qu'il s'était posé. Sans doute, il n'y a pas de concept qu'il cherche plus souvent à définir et dont il poursuive avec plus d'insistance l'analyse que celui de la fortuité. Mais cette insistance ne marque pas seulement le souci de prévenir des malentendus, ou d'élucider des idées peu familières au lecteur; elle témoigne aussi, selon nous, et malgré la netteté apparente de quelques formules, des hésitations d'une pensée qui ne parvient jamais à se satisfaire tout à fait. Quand on lit de près les chapitres que Cournot consacre à l'étude de hasard, on s'aperçoit qu'il ébauche tour à tour des théories assez différentes, sans qu'il indique d'ailleurs jamais lui-même le passage de l'une à l'autre, et sans qu'il se fixe jamais définitivement à aucune d'elles. Nous nous proposons de l'établir dans les pages suivantes. Mais auparavant nous expliquerons brièvement pourquoi la notion de l'indépendance des causes et des raisons tient tant de place dans les préoccupations de Cournot. C'est qu'elle supporte sa théorie capitale de l'induction, et qu'elle est destinée à résoudre les difficultés dernières que celle-ci contient.

A chaque page des ouvrages philosophiques de Cournot s'affirme l'idée « d'une subordination rationnelle, ou d'un ordre suivant lequel les choses s'enchaînent en tant que l'une est le principe ou la raison des autres » ('). Les sciences mathématiques, qui ont pour objet les vérités nécessaires et éternelles, nous en offrent le plus clair modèle. Mais l'esprit saisit aussi dans la nature « des faits généraux, des lois supérieures auxquelles sont subordonnées toutes les propriétés par lesquelles les objets extérieurs nous

(') *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales*, t. I, p. 64.

deviennent sensibles » (1). Les sciences qui embrassent le système de ces rapports abstraits ne doivent point passer pour des créations artificielles, conventionnelles et arbitraires de l'esprit humain. « Il n'est pas permis de dire, avec Vico, que nous démontrons les vérités géométriques parce que nous les faisons » (2). A vrai dire, rien n'est plus éloigné que le nominalisme de la pensée de Cournot. Il croit que « les choses intelligibles précèdent, surpassent, régissent les choses phénoménales et sensibles » (3). Et il cite, pour éclairer ses propres idées, la phrase de Giordano Bruno : « L'intelligence créatrice universelle a les mêmes rapports avec la production des choses naturelles, que notre intelligence avec les conceptions de genre et d'espèce ».

Mais par quelle démarche l'esprit pourra-t-il saisir ces lois qui tiennent à la nature même des choses ? Il ne lui suffira pas d'appliquer les règles de la logique aristotélicienne. Celle-ci, en effet, ne nous apprend pas à réfléchir directement sur les propriétés de l'objet, mais seulement sur les définitions au moyen desquelles nous les avons déjà exprimées, et elle n'introduit l'ordre que dans les figures du langage. L'enchaînement qu'elle établit entre les jugements ne dépend que de l'examen de leurs formes ; et, comme les choses ne se lient pas nécessairement de la même façon que nos propositions, l'exactitude logique ne se confond pas toujours avec la vérité rationnelle (4). Pour bien comprendre la stérilité de la syllogistique, il faut se rappeler les lumineuses définitions que Kant a données des jugements analytiques et synthétiques. Tant que nous nous proposons « d'éclairer et de développer la connaissance de l'objet plutôt que de l'étendre », d'obtenir en un mot des conclusions ou des jugements analytiques, il nous suffit, « sans avoir besoin de fixer davantage notre attention sur l'objet », de réfléchir sur nos définitions et de tirer, conformément aux règles de la logique, les conséquences qu'elles comportent. Mais dès que nous voulons accroître nos connaissances et opérer ce que Kant appelle une synthèse, nous sommes obligés « de laisser notre attention fixée sur l'objet, pour trouver, soit par l'expérience, soit par quelque considération ou construction que la nature de l'objet nous suggère, une propriété de cet objet qui n'était pas complètement contenue dans les termes de la définition, qui ne pouvait

(1) *Essai sur les fondements de nos connaissances*, t. I, p. 819.

(2) *Correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, p. 368.

(3) *Enchaînement*, t. I, p. 64.

(4) *Enchaînement*, t. I, p. 29.

pas en être tirée par la force de la logique seule » (1). Vainement, dans les sciences mathématiques, s'ingénierait-on à mettre la démonstration en syllogismes, en enthymèmes et en sorites. « On ne serait pas dispensé pour cela de l'invention » (2). Il faudrait toujours imaginer « certaine disposition ou construction idéale » qui mette en lumière la propriété nouvelle de la figure ou du nombre. Les mathématiques ne sont pas fondées, comme le croyait Leibnitz, sur le seul principe d'identité (3). — Dans les sciences de la nature, on aperçoit plus clairement encore que l'expérience méthodiquement interprétée pourra seule déterminer un progrès de connaissance. « Pour relier les observations particulières et en dégager les lois générales, pour ranger les observations et les lois dans l'ordre suivant lequel elles rendent raison les unes des autres, ou s'expliquent les unes par les autres, il faudra recourir à une logique supérieure à celle d'Aristote, et plus féconde, la logique de l'induction » (4).

Ainsi donc « nous n'arrivons à la conception des choses intelligibles, nous autres hommes, que par le canal des choses phénoménales et sensibles » (5). C'est un des principaux mérites de la philosophie de Cournot que d'avoir clairement expliqué comment peut s'effectuer ce passage. Il marque d'abord avec netteté l'intervalle qui sépare le point de départ et le point d'arrivée. La loi de Mariotte par exemple s'appuie sur un nombre nécessairement borné d'observations, et elle exprime cependant la relation des volumes aux pressions pour toutes les valeurs, en nombre infini, comprises entre les limites des expériences, ou même situées au delà. Le physicien « tire donc de l'expérience infiniment plus qu'elle ne semble de prime abord pouvoir donner. Il en tire même tout autre chose, puisqu'il en tire une loi, et qu'à proprement parler l'expérience ne peut donner qu'un fait » (6). De quelle méthode se sert-il pour obtenir un si merveilleux rendement ?

Le physicien « part de cette idée qu'il serait infiniment peu probable qu'une relation si simple subsistât pour plusieurs valeurs des pressions prises au hasard ou pour des motifs indépendants de la nature des phénomènes, s'il ne s'agissait d'une loi qui régit effectivement le phénomène dans sa continuité, aussi

(1) *Correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, p. 377.

(2) *Matérialisme, Vitalisme, Rationalisme*, p. 280.

(3) *Ibid.*, p. 268.

(4) *Enchaînement*, t. I, p. 8.

(5) *Enchaînement*, t. I, p. 29.

(6) *Matérialisme*, p. 326.

bien pour les valeurs intermédiaires, en nombre infini, que pour celles sur lesquelles a effectivement porté l'expérimentation. Il serait encore tout à fait improbable que la même loi cessât de régir le phénomène précisément à partir des valeurs extrêmes auxquelles l'expérience s'est arrêtée, quand d'ailleurs *le hasard seul*, non quelque considération tenant à la nature du phénomène, a déterminé l'expérimentateur à s'arrêter à telle expérience plutôt qu'à telle autre » ⁽¹⁾. D'une façon générale, toutes les fois qu'une hypothèse simple nous rend raison des apparences sensibles, — comme la théorie de la gravitation par exemple expliquant les mouvements apparents des planètes et de leurs satellites, — nous croyons que cette hypothèse est vraie et qu'elle exprime bien la vraie nature des choses. Nous concevons clairement, en effet, que la simplicité soit l'attribut des lois de la nature, du moins de ses lois primordiales. Tandis qu'au contraire il nous paraît tout à fait improbable qu'un accord aussi remarquable entre la théorie et les faits ait pu se produire accidentellement et sans raison tirée de l'essence des choses. Il faudrait que les phénomènes se fussent par hasard disposés de telle sorte que notre faux principe pût les coordonner artificiellement et simuler ainsi un vrai principe ⁽²⁾. Mais une disposition aussi singulière, parmi tant d'autres également possibles et qui ne donneraient pas lieu à la même méprise, a eu *si peu de chances* de se produire, qu'en écartant la présomption d'un tel hasard, on ne court pas grand risque de se tromper.

L'induction, dans la pensée de Cournot, n'est qu'un raisonnement de probabilité. Nous ne disons pas un calcul. Si, en effet, la probabilité d'une hypothèse croît à proportion de sa simplicité et de l'ordre qu'elle introduit dans nos connaissances, nous n'avons cependant aucun moyen de mesurer la valeur des chances favorables, puisque nous ne savons même pas évaluer numériquement le degré de la simplicité et de l'ordre ⁽³⁾. La discussion d'une théorie physique relève de l'esprit de finesse, non pas de l'esprit de géométrie, et nous jugeons de la confiance qu'elle mérite par une « appréciation consciencieuse » ⁽⁴⁾. Mais néanmoins « ce n'est que dans la théorie du hasard que nous pouvons trouver la vraie définition, la justification ou la critique des jugements par induction » ⁽⁵⁾. Faute de la connaître, et quoiqu'elle eût le

⁽¹⁾ *Matérialisme*, p. 326.

⁽²⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 91.

⁽³⁾ *Matérialisme*, p. 328. — Cf. *Théorie des chances*, p. 433 et suiv.

⁽⁴⁾ *Matérialisme*, p. 216.

⁽⁵⁾ *Matérialisme*, p. 326.

sentiment très vif des probabilités d'inégales forces, qui nous guident en toutes choses, l'école grecque connue sous le nom de « Troisième Académie » n'a pas su donner à la philosophie cette rigueur méthodique, sans subtilité, qu'exige l'esprit moderne ⁽¹⁾. Au contraire, dans les problèmes de probabilités mathématiques, que les modernes ont appris à traiter, le logicien trouve des exemples simples et d'une remarquable netteté, qui l'aident à comprendre, par une transposition facile, la forme du raisonnement inductif. En publiant « *La théorie des chances* » ⁽²⁾, qui fut un des premiers et qui est resté l'un de ses plus importants ouvrages, Cournot présentait l'introduction la plus opportune d'une philosophie de l'induction.

Mais le calcul des probabilités n'aurait pas d'objet, si le hasard, qu'il mesure et auquel il assigne des lois, n'était d'une certaine manière dans les choses mêmes, « s'il n'avait une part et une part notable dans le gouvernement du monde » ⁽³⁾. Pour qui adopterait cette opinion de Hume, que Laplace lui-même a professée, à savoir « qu'il n'y a pas de hasard à proprement parler, mais qu'il y a son équivalent : l'ignorance où nous sommes des véritables causes des événements » ⁽⁴⁾, le calcul des chances se réduirait à un « calcul des illusions ». Il ne serait plus qu'un art ingénieux, encore capable peut-être d'aider les joueurs à régler leurs enjeux dans les paris, mais dépourvu de toute valeur scientifique, et sur lequel ne pourrait se fonder aucune connaissance solide de la nature. Aussi, dès ses premiers ouvrages, Cournot affirme-t-il avec la plus grande netteté l'existence objective du hasard. Il emploie lui-même les épithètes d'objective et de subjective — empruntées à la langue de Bernouilli — pour distinguer les deux formes de la probabilité, celle qui mesure la vraie possibilité des événements et exprime un rapport subsistant entre les choses mêmes, et celle qui ne mesure que notre attente, dans tous les cas où l'insuffisance de nos observations ne nous permet pas de prévoir un fait que déterminent pourtant des lois nécessaires ⁽⁵⁾. Il y a des couples d'événements contraires qui sont les uns et les autres susceptibles de se produire et qui se produisent effectivement selon les combinaisons fortuites de certaines causes varia-

⁽¹⁾ *Essai*, t. I, p. 172.

⁽²⁾ *La théorie des chances et des probabilités* date de 1843; l'*Essai sur les fondements de nos connaissances* de 1851.

⁽³⁾ *Essai*, I, p. 64.

⁽⁴⁾ *Théorie des chances*, p. 82.

⁽⁵⁾ *Théorie des chances*, préface, p. v. — Cf. *Essai*, t. I, p. 62.

bles ⁽¹⁾. Et ils ne perdraient pas leur caractère aléatoire aux yeux d'une intelligence infinie, qui lirait avec une parfaite clarté dans l'enchaînement des causes et des effets ⁽²⁾. Cette intelligence divine aurait seulement le privilège de poser toujours en termes corrects les problèmes de probabilité, et d'effectuer des calculs que leur difficulté nous empêche le plus souvent d'aborder.

En résumé, une philosophie de l'induction doit s'appuyer sur deux concepts essentiels. En vertu de son objet, qui est de retrouver l'ordre rationnel, l'enchaînement régulier des phénomènes sensibles, elle affirme que la nature est régie par des lois nécessaires, immuables et éternelles. En vertu de sa méthode, qui consiste dans l'évaluation de certaines probabilités et qui prend son modèle dans la théorie mathématique des chances, elle soutient que le hasard joue un rôle effectif dans les événements du monde. Suivant la formule significative de Cournot lui-même, *la théorie de la probabilité philosophique* « tient à la fois à la notion du hasard et au sentiment de l'ordre et de la simplicité des lois qui l'expriment » ⁽³⁾. « Aucun événement n'est produit sans cause », tel est le premier de ses axiomes; et c'est en effet « le principe souverain et régulateur de la raison humaine dans l'investigation des faits réels » ⁽⁴⁾. « Le hasard gouverne le monde, ou du moins il a une part et une part notable dans le gouvernement du monde » ⁽⁵⁾. Tel est le second axiome fondamental. Et, en effet, « la raison même nous impose l'idée du hasard... Celle-ci est le principe de tout espèce de critique, soit qu'il s'agisse des plus hautes spéculations de la philosophie ou des recherches de l'érudition, ou de la pratique la plus ordinaire de la vie » ⁽⁶⁾.

Sans doute — à première vue — ces deux postulats, aussi inévitables l'un que l'autre, paraissent directement se contredire. Mais l'originalité de Cournot consiste à soutenir que cette opposition n'est qu'apparente. « Le déterminisme absolu, dit-il, tel qu'on

⁽¹⁾ *Théorie des chances*, p. 81.

⁽²⁾ Cette affirmation est reproduite dans tous les ouvrages où Cournot traite du hasard.

⁽³⁾ *Théorie des chances*, p. 2.

⁽⁴⁾ *Enchaînement des idées fondamentales*, t. I, p. 103.

⁽⁵⁾ *Théorie des chances*, p. 83.

⁽⁶⁾ *Considérations sur la marche des idées*, t. I, p. 2. Comme la raison est « la faculté que nous avons de saisir la raison des choses, c'est-à-dire l'ordre suivant lequel les faits, les lois, les rapports, objets de notre connaissance, s'enchaînent et précèdent les uns des autres » (*Essai*, t. I, p. 29), ce texte signifie que la méthode par laquelle notre raison découvre l'ordre et l'enchaînement des choses s'appuie sur le postulat de l'existence objective du hasard.

l'admet avec fondement, d'après les données de la science, dans l'ordre des phénomènes physico-chimiques, n'exclut point la notion de l'indépendance des causes, ni par suite de l'accidentel et du fortuit et d'une part faite au hasard dans la succession des phénomènes et des événements » ⁽¹⁾. Ainsi, pour justifier jusqu'au bout sa méthode, une philosophie de l'induction doit concilier le déterminisme et le hasard. D'ailleurs, dès le début de ses réflexions ⁽²⁾, Cournot a cru en trouver le moyen dans l'idée d'une indépendance absolue entre certaines séries collatérales de raisons ou de causes. Mais, comme le concept du hasard joue un rôle capital dans l'ensemble de sa philosophie, il s'est appliqué bien des fois à mettre au point ou à retoucher la définition générale qu'il en avait d'abord donnée dans la « *Théorie des chances* » et qu'il reprend, pour la préciser, dans ses autres ouvrages.

Nous exposerons d'abord, pour fixer les idées, cette définition générale et les exemples habituels au moyen desquels il l'illustre. Puis nous analyserons de plus près les précisions qu'il y ajoute dans les parties le plus ésotériques de ses traités.

(1) *Matérialisme*, p. 67.

(2) Dès son ouvrage sur la « *Théorie des chances* », Cournot est déjà en pleine possession de sa méthode. Dans le chapitre XVII, il définit très nettement les règles de la probabilité philosophique, c'est-à-dire de l'induction ; et, dans le chapitre IV, il a déjà ramené le hasard à l'indépendance des causes, ce qui lui permet, pense-t-il, d'introduire la contingence dans le monde sans détriment pour l'ordre et l'enchaînement causal.

I

Définition générale du hasard.

« Le mot hasard n'indique pas une cause substantielle, mais une idée : cette idée est celle de la combinaison entre plusieurs séries de causes ou de faits qui se développent chacun dans sa série propre, indépendamment les uns des autres » ⁽¹⁾. En effet, « une infinité de séries parallèles peuvent coexister dans le temps ; elles peuvent se croiser, de manière qu'un même phénomène, à la production duquel plusieurs phénomènes ont concouru, tienne comme effet à plusieurs séries distinctes de causes génératrices, ou engendre à son tour plusieurs séries d'effets qui restent distincts et parfaitement séparés au delà du terme initial » ⁽²⁾. En un mot, l'événement fortuit résulte de l'action commune de plusieurs circonstances qui ont chacune et individuellement leur cause, en sorte que le déterminisme se trouve satisfait, sans que, néanmoins, leur conjonction dépende d'aucune loi assignable, en sorte qu'elle peut être réputée comme un accident. Et c'est à peu près la définition que donnait déjà Jean de la Placette, ministre protestant de Hollande, dans son *Traité des jeux de hasard* ⁽³⁾.

Au lieu de soumettre à l'épreuve de la critique les conditions logiques de cette notion de l'indépendance et d'en préciser le sens par une analyse abstraite, Cournot préfère suivre une méthode plus conforme à son génie et qui lui est familière : il éclaire ce concept par une série nombreuse d'exemples concrets. Ceux qu'il choisit le plus souvent peuvent, pour la commodité de l'exposition, se ranger sous trois chefs principaux.

⁽¹⁾ *Essai*, t. I, p. 63.

⁽²⁾ *Théorie des chances*, p. 71.

⁽³⁾ « Pour moi, je suis persuadé que le hasard renferme quelque chose de réel et de positif, savoir un concours de deux ou plusieurs événements contingents, chacun desquels a ses causes, mais en sorte que leur concours n'en a aucune que l'on connaisse » (Cité par Cournot, *Essai*, t. I, p. 56, note).

1° *Les accidents.* — Un homme est frappé par la foudre au milieu d'une plaine nue ou au milieu d'une forêt. Un passant reçoit sur la tête une tuile que laisse tomber un couvreur maladroit. Un voyageur est blessé dans un accident de chemin de fer. Voilà des événements que tout le monde attribue avec raison au hasard. Si, d'ailleurs, ils méritent d'être qualifiés de fortuits, ce n'est point qu'ils soient rares ou surprenants, c'est qu'ils résultent d'un concours accidentel de causes. Et, pour reprendre le premier de ces exemples, on voit clairement qu'il n'y a aucune solidarité entre les raisons qui amènent l'homme en tel lieu et celles qui font que la foudre y éclate au même moment ⁽¹⁾.

2° *Les coïncidences.* — Que deux frères, qui servent dans deux armées différentes, soient tués dans un combat le même jour. Si les opérations de ces deux armées se sont poursuivies dans des régions très éloignées, la frontière du Nord et celle des Alpes, par exemple, si bien que leurs mouvements, tout en obéissant peut-être à une direction commune, n'ont pu cependant être réglés dans leurs détails les uns sur les autres, il faudra reconnaître dans cette mort simultanée l'intervention du hasard. En effet, « si les corps auxquels les deux frères appartiennent respectivement ont donné dans les deux combats, si la mêlée a été meurtrière des deux côtés, si tous deux ont succombé, il n'y a rien dans leur qualité de frère qui rende raison d'un tel rapprochement » ⁽²⁾. « Un homme qui ne sait pas lire extrait un à un des caractères d'imprimerie entassés sans ordre : ces caractères, dans l'ordre où il les amène, donnent le mot Alexandre. C'est une rencontre fortuite ou un résultat du hasard, car il n'y a nulle liaison entre les causes qui ont dirigé la main de cet homme et celles qui ont imposé le nom d'Alexandre à un conquérant fameux, qui l'ont attribué ensuite à d'autres personnages historiques, qui en ont fait un nom ou un prénom vulgaire et l'un des mots les plus connus de la langue » ⁽³⁾.

3° *Les opérations des jeux de hasard.* — Ceux-ci sont évidemment combinés de telle sorte que chacun des événements de même espèce ait les mêmes chances de se produire. Si, pour déterminer par exemple le numéro gagnant d'une loterie, on se sert d'une urne qui contient le nombre requis de boules semblables, et qu'après l'avoir agitée en tous sens, on procède à un tirage aveugle; comme le mouvement de la main qui saisit l'une des boules

⁽¹⁾ *Théorie des chances*, p. 75.

⁽²⁾ *Théorie des chances*, p. 75. — Cf. *Essai*, t. I, p. 52 et suiv.

⁽³⁾ *Théorie des chances*, p. 74.

ne tient en aucune manière à la disposition relative qu'elles ont prise dans l'urne, l'extraction aura bien lieu au hasard. Ou encore, si l'on jette les dés, le résultat dépendra à la fois de leur position initiale dans le cornet et de l'intensité, de la direction, du point d'application de la force avec laquelle on les projette. Mais, comme aucune loi n'établit une correspondance régulière entre ces deux sortes de circonstances, le résultat de leur combinaison doit certainement présenter tous les caractères de la fortuité.

Le concept de l'indépendance, malgré les nombreux exemples qui l'illustrent, reste encore à préciser. Est fortuit l'événement qui se rencontre au point d'interférence de plusieurs séries de causes, lesquelles se développent chacune pour elle-même, et ne sont point solidaires. Mais, que faut-il entendre exactement par là? La première condition de l'indépendance des causes, c'est évidemment qu'elles ne soient pas impliquées logiquement ou analytiquement les unes dans les autres. Il faut aussi qu'elles n'aient entre elles aucun lien rationnel; ou bien, puisque la raison a pour objet l'ordre, la forme, la loi, que leur association ne soit déterminée par aucune loi générale. La coexistence de ces causes se présente alors comme un simple fait. Or Cournot s'applique toujours à marquer « le contraste de la loi et du fait; de ce qui est essentiel ou nécessaire en vertu d'une loi et de ce qui résulte accidentellement ou fortuitement de certaines rencontres dont nous n'admettons pas la nécessité en vertu d'une loi » ⁽¹⁾. La loi se caractérise par sa généralité et sa simplicité. Et nous observons, au contraire, des combinaisons individuelles de phénomènes, lesquelles n'offrent pas un ordre assez simple pour que la raison puisse se reconnaître en elles. Ces combinaisons d'événements et les événements qui en résultent, voilà le domaine du hasard.

Pour définir la fortuité, Cournot croit qu'il n'est pas besoin de renier le déterminisme ni d'admettre « l'hypothèse absurde d'un effet sans cause » ⁽²⁾. Toutes les parties du temps, pourrait-on dire, sont liées les unes aux autres; mais les parties de l'espace, si nous le considérons avec Leibnitz comme l'ordre des coexistences, ne le sont point. Or la théorie des chances nous laisse libres d'affirmer la production nécessaire du résultat fortuit lui-même, si seulement nous nions la solidarité de ses causes. Ainsi l'existence des faits accidentels peut très bien se concilier avec le

⁽¹⁾ *Enchaînement des idées fondamentales*, t. I, p. 91.

⁽²⁾ *Considérations sur la marche des idées*, t. I, p. 4.

principe de la causalité universelle. Et le but de Cournot semble atteint.

Cependant le succès de son interprétation n'est encore qu'apparent et l'on ne saurait considérer son analyse comme achevée. Reconnaissons d'abord que le concept de l'indépendance ne peut passer pour le principe premier et irréductible de la théorie du hasard. On ne conçoit point, en effet, comment les causes partielles d'un phénomène seraient indépendantes les unes des autres, si l'existence de toutes ou du moins de quelques-unes d'entre elles n'était déjà contingente. Supposons, au contraire, que l'existence de chacune fût impliquée dans quelque loi essentielle de la nature, la nécessité de leur association serait évidemment comprise elle-même dans l'ensemble de ces lois, et, pour la raison, celle-ci ne saurait être autre qu'elle n'est. Dès lors, il deviendrait absurde de parler de leur indépendance, car le terme n'a pas de sens, s'il ne signifie pas que les termes indépendants peuvent se combiner de plusieurs manières ou de mille manières qui sont également possibles et dont aucune ne s'impose. Il faut donc que — d'un certain point de vue — chacune des causes concourantes présente déjà le caractère de la fortuité, sans quoi leur somme ne le présenterait pas non plus; et le hasard ne saurait naître de la seule juxtaposition d'événements rationnels et nécessaires. Mais si chaque cause prise à part porte déjà la marque de la contingence, il en sera de même de son effet à supposer même qu'elle soit seule à le produire. Et le défaut de solidarité entre les causes n'est pas la condition indispensable à la manifestation du hasard ⁽¹⁾. Il semble donc que Cournot intervertisse l'ordre naturel de l'enchaînement des notions, en donnant pour fondement à sa théorie le concept de l'indépendance, lequel est certainement dérivé, et ne se comprend que dans la mesure où l'on comprend déjà le caractère contingent de chaque cause.

Mais comment faut-il l'entendre? Dans la pensée de Cournot il n'y a point d'effet sans cause, et nous n'observons jamais dans le temps de commencement absolu. Chaque phénomène est déter-

(1) Qu'un promeneur reçoive une tuile sur la tête. Voilà un exemple d'événement fortuit. Faut-il attribuer ce caractère de fortuité à l'absence de tout lien de solidarité entre la promenade et la chute de la tuile? Mais l'analyse doit remonter plus loin. Si, en effet, la chute et la promenade pouvaient l'une et l'autre être assimilées à des vérités éternelles, elles ne seraient pas indépendantes. Il faut donc que l'une et l'autre aient déjà, chacune en elle-même, quelque chose de contingent et que chacune, *prise à part*, puisse déjà être considérée comme une manifestation du hasard.

miné par d'autres phénomènes antérieurs; mais cependant, tant qu'il ne se présente à nous que comme un résultat, il ne peut devenir entièrement intelligible, parce que la cause qui l'a engendré n'est elle-même qu'un fait empirique, lequel, il est vrai, dépend à son tour de circonstances antérieures, mais ne peut jamais se rattacher à une loi rationnelle, comme une conséquence à son principe. Nous sommes donc certainement impuissants à rendre parfaitement raison d'aucun phénomène particulier. Dans quelle mesure cette imperfection de notre science nous autorise-t-elle à considérer ces phénomènes comme des produits du hasard? Tel est le problème capital. Malheureusement, il n'en faut point chercher une solution définitive dans les ouvrages de Cournot. Pour en donner une, il faudrait se placer résolument à l'origine du temps, puisque, dans l'hypothèse où tous les moments du temps sont liés les uns aux autres par un déterminisme rigoureux, ce n'est que dans l'acte initial de la création que peut s'exercer directement l'influence du hasard, pour se propager de proche en proche dans toute la suite du devenir. Mais Cournot, convaincu que toutes les questions d'origine dépassent la raison humaine, se dérobe au problème métaphysique que soulève sa théorie du hasard. Il s'en tient à l'idée de l'indépendance des causes, laquelle, nous l'avons dit, n'est que dérivée, mais qu'il semble considérer comme primitive, et qui reste inévitablement obscure, parce qu'il se refuse à l'analyser jusqu'au bout. Il se borne à multiplier les exemples. Nous exposerons plus loin, d'après notre philosophe, le plus général et le plus instructif d'entre eux, celui de la causalité mécanique. Il est bien propre à marquer l'opposition de la loi et du fait, de la donnée théorique et de la donnée empirique. Il nous met sur la voie d'une définition du hasard. Mais la méfiance que professe Cournot à l'égard de la métaphysique empêche qu'il n'en précise définitivement les termes.

Nous nous sommes placé jusqu'ici, pour ébaucher avec Cournot la théorie du hasard, dans l'ordre des phénomènes physiques. Au sein de chaque série causale tout est rigoureusement déterminé et tous les termes dépendent nécessairement les uns des autres. Mais si l'on veut faire une place à la contingence, il faut bien, semble-t-il, admettre que l'existence de la série tout entière, fût-elle infinie dans le temps, ne se pose qu'à titre de fait empirique et qu'elle aurait pu ne pas être. Une indétermination très grave subsiste donc dans les choses au regard de la raison. Or il semble bien que Cournot ne s'en soit pas toujours accommodé. Et il s'est ingénié à interpréter son concept de l'indépen-

dance de telle sorte qu'il pût s'appliquer à un monde parfaitement intelligible. Il ne faut pas croire en effet, nous dit-il, que la théorie des chances implique la notion de causalité physique, et qu'elle concerne seulement les faits particuliers qui apparaissent dans le temps, que nous réputons aléatoires et contingents parce que nous ne pouvons jamais en acquérir une connaissance rationnelle. Ses lois conserveraient leur valeur au regard « d'une intelligence supérieure qui lirait dans l'enchaînement des causes et des effets, comme nous lisons dans les *formules mathématiques* que nous avons construites par nos propres forces » ⁽¹⁾. A supposer que le plan de la nature fût assez précis pour s'étendre jusqu'aux détails et aux phénomènes particuliers eux-mêmes, et que Dieu en eût disposé dans l'acte de la création « pour les coordonner à des vues qui échappent à nos sciences et à nos théories », il n'en resterait pas moins que « le hasard a une part notable dans le gouvernement du monde » ⁽²⁾. Il convient même d'être plus affirmatif : notre science des causes, laquelle consiste à rattacher un fait empirique à un autre fait empirique et à remonter la série indéfinie des conditions, sans jamais rencontrer un terme inconditionné, reste superficielle. Mais, pour l'intelligence souveraine, « l'idée de cause à proprement parler n'a plus d'objet, parce que la cause c'est sa volonté, et que sa volonté c'est la raison » ⁽³⁾. Cependant l'idée de conjonction fortuite subsisterait à ses yeux. En somme, malgré l'infirmité de l'esprit humain qui ne saisit jamais le fond des choses, le monde est intelligible dans son fond. Mais il reste possible d'assigner encore une influence au hasard dans l'ordre des choses intelligibles elles-mêmes, où tout a non seulement une cause mais une raison. Telle est l'affirmation audacieuse de Cournot dans la partie la plus originale mais aussi la plus paradoxale de sa thèse. Et, pour l'établir, il prend ses exemples dans certains faits mathématiques et s'efforce de montrer que la distribution des chiffres dans l'expression décimale d'un nombre incommensurable comme π ou comme e présente tous les caractères habituels de la fortuité. D'ailleurs il a encore recours — pour l'expliquer — à l'idée de l'indépendance qu'il semble de plus en plus considérer comme primitive et irréductible. La répartition irrégulière des chiffres résulte, en effet, de l'indépendance des raisons mathématiques qui la commandent : d'une part la définition de la grandeur à

⁽¹⁾ *Enchaînement des idées fondamentales*, t. I, p. 100.

⁽²⁾ *Essai*, t. I, p. 64.

⁽³⁾ *Matérialisme*, p. 313. Sur la distinction de la raison et de la cause, voy. plus loin ch. III.

mesurer et, d'autre part, les règles de notre arithmétique décimale. Plus que jamais Cournot s'efforce de réduire le hasard à la négation de tout lien de solidarité. A-t-il réussi dans sa tentative ? Nous le discuterons plus tard, et nous essaierons de montrer où réside le paradoxe de son interprétation.

Mais insistons sur un point. Qu'on ne croie pas que cette nouvelle application du concept de l'indépendance joue un rôle secondaire dans la théorie du hasard, ni qu'elle concerne seulement quelques curieux exemples mathématiques. Elle a au contraire une portée très générale et il convient d'y chercher l'expression la plus ésotérique de la pensée de Cournot. Il ne faut pas, en effet, se laisser tromper par l'empirisme apparent d'une philosophie de l'induction. Toutes les fois que notre philosophe s'élève — ce qui est rare — à des vues métaphysiques, il laisse entendre qu'il y a une science de la nature plus profonde que notre science, et qu'elle peut être assimilée à la connaissance mathématique. Accorderait-elle encore une place au hasard ? Ou bien, en dernière analyse, le hasard n'est-il « qu'un fantôme créé pour nous déguiser à nous-mêmes notre ignorance » ? Telle est la question qui se pose en définitive. Cournot n'hésite pas à répondre. « Notre science des causes pourrait se perfectionner au point de ramener la théorie du monde à n'être qu'un théorème de mathématiques sans que ce perfectionnement fit évanouir l'idée de fortuité et ses conséquences naturelles » (1). Selon le texte très important que nous avons déjà cité, l'idée de la causalité n'aurait plus d'objet pour l'intelligence infinie, et Dieu se représenterait le monde comme un pur produit de sa raison. Il concevrait chaque phénomène comme la conséquence infaillible d'un ensemble de principes intelligibles. Et, cependant, à ses yeux parfaitement clairvoyants, la juridiction du hasard ne cesserait point de s'exercer. Pour le comprendre, il nous suffit d'admettre que « la nature ne se gouverne pas par une loi unique », que « ses lois ne sont pas toutes dérivées les unes des autres, ou dérivées toutes d'une loi supérieure par une nécessité purement logique » et que « nous devons les concevoir au contraire comme ayant pu être décrétées séparément d'une infinité de manières » (2). Ainsi dans une science parfaite du monde, la fortuité ne pourrait plus s'expliquer par l'indépendance des causes, mais elle résulterait encore de l'indépendance des raisons. Il est vrai qu'une très grave difficulté se pré-

(1) *Matérialisme*, p. 313.

(2) *Essai*, t. I, p. 134.

sente aussitôt. Si les lois de la nature n'expriment que les décrets arbitraires de la volonté créatrice, on comprend sans peine qu'elles soient indépendantes les unes des autres et qu'il y ait du hasard dans les phénomènes, puisque les lois elles-mêmes, en dépit de leur généralité, ne sont en définitive que le produit du hasard. Mais alors l'ordre qui se réalise dans le monde ne saurait passer pour rationnel. Si, au contraire, les lois sont véritablement intelligibles, comment peut-on les assimiler à des décrets séparés et indépendants les uns des autres ? Le premier caractère de la raison n'est-il pas de former un système où tout se tient ? Et, suivant une remarque profonde de Renouvier dans sa critique de Cournot, la nécessité des lois rationnelles peut-elle se concevoir sans leur solidarité ? Quoi qu'il en soit, l'on ne saurait traiter d'accessoire l'application que fait Cournot du concept de l'indépendance à l'ordre des relations abstraites et mathématiques.

Nous trouvons, en un mot, dans les ouvrages de ce philosophe deux tentatives principales pour définir le hasard. La première concerne les faits physiques et notre science bornée ; la seconde, les faits intelligibles et une science parfaite. Pour assurer une place à la fortuité — sans ruiner le déterminisme ni compromettre l'existence de l'ordre intelligible — Cournot invoque tour à tour l'indépendance des causes, puis celle des raisons. Chaque phénomène particulier dépend nécessairement des causes qui concourent à le produire. Mais il arrive souvent que le fait de l'association de ces causes elles-mêmes n'est pas apparemment compris dans le plan général de la nature. Il s'offre à notre observation comme un simple événement empirique ; et, de ce chef, quelque chose de contingent subsiste toujours en lui. Mais notre connaissance de la nature n'est pas la mesure de la science divine. L'intelligence souveraine conçoit chaque fait, si infime soit-il, comme la conséquence des vérités éternelles. Alors, sous un regard aussi perçant, le hasard ne s'évanouit-il pas comme un fantôme ? Question troublante et qui semble préoccuper Cournot, car il y revient souvent, quoiqu'il ne la discute jamais longuement et qu'il y fasse toujours une réponse en apparence très catégorique. Il lui semble que l'hypothèse de l'indépendance suffit à tout, et qu'on peut résoudre cette nouvelle difficulté en changeant un terme à sa définition du hasard, en substituant le mot de raison à celui de cause. En effet, les lois rationnelles qui ont présidé à la création et rendent possible la prévision divine ne se déduisent pas logiquement les unes des autres ; elles n'ont pas toutes le même objet, elles ne sont point comme les parties solidaires d'un même système. Aussi leur

indépendance nous garantit-elle que les phénomènes résultant de leur concours porteront la marque de la fortuité.

Cournot a-t-il vraiment résolu le problème apparemment insoluble qu'il s'était posé? A-t-il pu concilier les prérogatives de la raison créatrice et celles du hasard? Nous le discuterons plus loin. Nous devons maintenant, après avoir indiqué les principaux aspects de la théorie, entreprendre de l'exposer en détail.

II

Le hasard et les systèmes isolés.

Signalons d'abord une première explication donnée par Cournot de l'indépendance des causes. Nous n'y insisterons pas parce qu'elle présente les caractères d'un simple symbole plutôt que ceux d'une analyse rigoureuse. « Certains philosophes, dit-il, dans la *Théorie des chances*, se sont imaginé que tout dans le monde se tenait, et ils l'ont prouvé à leur manière, ou par des arguments subtils, ou par des plaisanteries ingénieuses; mais, ni leurs subtilités, ni leurs plaisanteries ne sauraient prévaloir contre les croyances du sens commun. Personne ne pensera qu'en frappant la terre du pied il dérange le navigateur qui voyage aux antipodes, ou qu'il ébranle le système des satellites de Jupiter. Quand on voudrait admettre en théorie l'existence de pareilles perturbations, opérées par de telles causes, il faudrait reconnaître que ces perturbations sont inappréciables pour nous ⁽¹⁾; que nous n'avons aucun moyen d'en suivre la trace dans les phénomènes; en d'autres termes, que la solidarité prétendue ne se manifeste par aucun signe sensible et que, dans l'ordre des faits observables, elle est comme n'existant pas » ⁽²⁾. Si nous comprenons bien l'argument de Cournot, il existe des systèmes de corps, — ceux par exemple qui sont très éloignés les uns des autres — entre lesquels ne s'exerce aucune action matérielle sensible, et que l'on peut considérer, au sens mécanique du mot, comme relativement isolés.

Mais cette remarque suffit-elle à éclairer la théorie du hasard ? D'abord, dans un système où tout tient à tout, il y a encore place

⁽¹⁾ Cf. le texte suivant : « Les phénomènes enchaînés les uns aux autres forment un réseau dont toutes les parties adhèrent entre elles, mais non de la même manière ni au même degré. On n'en peut comparer le tissu ni à un système doué d'une rigidité parfaite et qui, pour ainsi dire, ne serait capable de se mouvoir que tout d'une pièce, ni à un tout dont chaque partie serait libre de se mouvoir en tous sens avec une indépendance absolue » (*Essai*, t. I, p. 133).

⁽²⁾ *Théorie des chances*, p. 73. Cf. *Essai*, t. I, p. 51.

pour l'accident. Que deux corps s'attirent suivant la loi de Newton, la possibilité de leur collision dépendra de la direction de leurs vitesses initiales; et, à supposer que celle-ci soit fortuite, la rencontre des masses le sera aussi, quoiqu'elles soient mues à chaque instant l'une par l'autre. Au contraire, il ne suffit pas que deux suites d'événements n'aient entre elles aucune solidarité matérielle, pour que leur point de concours ne relève que du hasard. La flèche, lancée par un chasseur habile, atteindra sûrement l'oiseau, quoique le battement des ailes n'exerce aucune influence sur son mouvement. Cournot ne peut pas l'oublier, lui qui explique très clairement, dans un chapitre de l'*Essai* ⁽¹⁾, que le concours harmonique des événements peut s'expliquer de plusieurs manières : tantôt, il est vrai, par des réactions mutuelles entre les corps, dont le jeu peut amener dans l'état final une harmonie qui n'existait pas dans l'état initial [si par exemple deux pendules attachés à la même planchette parviennent, grâce aux vibrations qu'ils lui communiquent, à régler leurs mouvements l'un sur l'autre], mais tantôt aussi par une direction intelligente et providentielle, par l'action d'une cause plastique. En un mot, l'absence de toute liaison mécanique entre les systèmes ne suffit pas à assurer leur indépendance et à soumettre leurs relations au caprice du hasard.

Aussi ces premières explications doivent encore être rapportées à l'exposition populaire des idées de Cournot. Il ne faut y chercher qu'une illustration du concept abstrait de l'indépendance.

(1) *Essai*, t. I, chap. V.

III

Le hasard et la causalité mécanique.

Nous avons hâte d'exposer une définition beaucoup plus profonde que l'on obtient en rapprochant des passages très importants des ouvrages de ce philosophe.

L'événement fortuit ne se réalise en vue d'aucune fin ; il se produit sans raison. Et, comme Cournot oppose sans cesse la raison des choses à la causalité, le mécanisme à la finalité, cela revient à dire que le domaine de la causalité mécanique est par excellence celui du hasard. Nous allons l'expliquer en détail.

Dans un chapitre capital de « *Matérialisme* » ⁽¹⁾, Cournot nous prépare à comprendre son analyse du hasard par une longue distinction de la raison et de la cause. Nous jouons à croix ou pile ; à chaque coup, l'impulsion donnée à la pièce, le frottement de l'air, l'action de la pesanteur interviennent pour déterminer le résultat ; ce sont autant de *causes* ou de forces qui se combinent de mille manières. Mais, si la pièce est parfaitement homogène et ne présente aucune inégalité de structure, il n'y a aucune *raison* pour qu'une face se présente plutôt qu'une autre. Au contraire, une bavure de l'empreinte, un défaut d'homogénéité du métal exerceraient une influence sur le résultat à travers toute la série des coups, concurremment avec les causes particulières qui varient d'un coup à l'autre. Elles en expliqueraient la forme ; elles en marqueraient la raison ⁽²⁾. Il serait tout à fait impossible au naturaliste de retrouver la longue suite de causes qui, s'enchaînant dans l'immensité du temps, ont peu à peu donné naissance à un type organique, celui du carnassier par exemple, si, toutefois, la cause première ne l'a pas réalisé tout d'un coup dans l'acte de la création. Mais, un animal dont les dents sont aptes à déchirer et à broyer vit de proie, et il faut que tous ses organes de nutrition et de relation soient appropriés à ce genre de vie,

(1) Sect. IV, § 3.

(2) *Matérialisme*, p. 362.

adaptés à cette fonction maîtresse. Aussi le naturaliste trouve-t-il dans l'idée de cette subordination non pas la *cause*, mais la *raison* des principaux caractères de la structure organique. Enfin, pour prendre un dernier exemple, l'historien philosophe ne se perd pas dans les détails de l'anecdote ; il ne s'intéresse pas aux causes particulières et contingentes, aux accidents de la carrière des grands personnages, mais il s'attache seulement à retrouver les raisons profondes, géographiques, économiques, juridiques, morales, dont l'influence continue donne à la vie d'un peuple sa principale orientation ⁽¹⁾. Pour éclairer la distinction de Cournot, on pourrait rappeler le mot de Michelet : « L'Angleterre est une île ; maintenant vous en savez autant que moi sur son histoire ». Il n'en avait pas exposé les *causes*, mais il en avait montré la *raison*.

Ainsi, dans l'ordre des phénomènes naturels, Cournot appelle « raison » la disposition stable et permanente, dont l'action régulière finit par prévaloir dans le résultat général, parce qu'elle s'exerce sans arrêt dans tout le cours du temps. La cause efficiente au contraire agit à un instant unique ; son action ne dure pas, elle ne se prolonge que dans son effet. « L'idée que nous nous faisons, dit Cournot, de la relation entre les causes efficientes et les effets implique l'idée de phénomènes qui se succèdent dans l'ordre du temps » ⁽²⁾. Aussi l'influence d'une cause peut-elle être souvent détruite ou neutralisée, dans la suite, par celle des causes contraires et ne plus se retrouver dans le résultat moyen. La cause, opposée à la raison, c'est l'action du fait individuel, comme tel. Cette distinction nous expliquera l'idée du hasard. Car l'accident a bien une cause ; mais il n'est pas impliqué dans l'ordre permanent et universel que saisit la raison.

En outre, dans un chapitre de l'*Essai* ⁽³⁾, Cournot nous montre que, dans l'étude des phénomènes naturels, l'hypothèse de la finalité et celle du hasard relèvent d'une même méthode de critique. Ce sont, en effet, pourrait-on dire dans le langage d'Aristote, les extrêmes d'un même genre. Lorsque nous observons la disposition harmonique d'un ensemble de faits, nous pouvons en général l'expliquer de deux manières, soit par l'épuisement de toutes les combinaisons fortuites, soit par l'intervention d'une cause intelligente et providentielle. Par exemple, les conditions de sta-

⁽¹⁾ *Matérialisme*, p. 304 ; *Essai*, t. I, p. 39 et suiv.

⁽²⁾ *Essai*, t. I, p. 39.

⁽³⁾ *Essai*, t. I, chap. V.

bilité du système planétaire ont-elles été réalisées accidentellement, à la suite de longs tâtonnements, où une infinité de dispositions différentes se sont d'abord présentées; ou bien, ont-elles été assurées, dès l'origine, par les soins de la cause première? La distribution des éléments chimiques à la surface de la terre et leur appropriation aux besoins des êtres vivants, l'organisation de ces êtres vivants eux-mêmes et l'adaptation des organes aux fonctions soulèvent les mêmes problèmes. Pour les discuter et choisir entre les deux hypothèses contraires, nous n'avons d'autre moyen que de leur appliquer l'idée de la probabilité. S'il est avéré que la nature a disposé d'un temps infini, pendant lequel chacune des combinaisons possibles avait chance d'apparaître par le seul jeu des forces mécaniques, elle a dû tomber à la fin sur la combinaison harmonique, dont la réalisation n'était à chaque instant ni plus ni moins probable que celle des autres. Alors l'hypothèse d'un arrangement providentiel est superflue. Mais il en va tout autrement, quand on a des raisons de croire qu'il ne s'est écoulé depuis l'origine qu'un temps limité. Si, en effet, l'arrangement le plus parfait n'avait pas été élu, au milieu de tous les autres, par une cause intelligente, l'épreuve du hasard ne lui aurait attribué qu'une chance négligeable d'être produit. Telle est la méthode que propose Cournot et qu'il applique dans une discussion fort curieuse à l'hypothèse du transformisme et de la sélection naturelle. Nous n'avons à retenir que l'idée maîtresse qui l'inspire. Le hasard et le mécanisme s'opposent l'un et l'autre à la finalité. C'est donc qu'il y a entre eux un rapport étroit. Et dire qu'un certain arrangement a été produit par hasard revient exactement à dire qu'il est le produit de forces mécaniques et aveugles.

En rapprochant les deux chapitres de l'« *Essai* » et de « *Matérialisme* », nous arrivons à la conclusion suivante : à considérer les phénomènes naturels, c'est dans le jeu de la *causalité mécanique* que nous trouverons les exemples décisifs des combinaisons du hasard. Analysons donc, avec Cournot, la constitution d'un système mécanique et voyons la part qui, dans ses mouvements, revient à l'accident en dépit de leur déterminisme rigoureux.

Cournot définit d'abord un tel système par deux caractères très généraux et très importants :

1° « Nous admettons, dit-il, que chaque élément d'un système matériel exerce sur un autre élément du même système, ou sur chaque élément d'un autre système, l'action qui lui est propre..., absolument comme s'il n'y avait que ces deux éléments en pré-

sence et que tous les autres fussent anéantis... Une planète en attire une autre absolument comme si les autres planètes n'existaient pas, et, de même, quand un bloc de glace se fond, le travail de fusion qui s'opère en un point de la masse ne dépend en aucune façon du travail de fusion qui s'opère en un autre point » ⁽¹⁾.

2° Le second caractère consiste en ce que « toutes les forces dont le physicien et le chimiste s'occupent ont actuellement une action déterminée par l'état actuel du système, sans aucune référence aux phases antérieures, de manière à se retrouver exactement les mêmes et à agir exactement de la même manière, chaque fois que le système revient au même état » ⁽²⁾.

On ne saurait marquer en termes plus nets et plus scientifiques — Cournot se borne, en effet, à reproduire les principes essentiels de la mécanique de Newton — le caractère aveugle des forces matérielles. L'action d'un élément ne s'adapte point à celle des autres, pour collaborer dans un même effort à la réalisation d'un ordre général. Mais elle produit son effet propre, sans que d'ailleurs le souvenir du passé ou la prévision du futur en modifie la forme, que détermine seul l'état actuel du système. Cournot pourrait reprendre la seconde partie de la définition fameuse de Leibnitz : *corpus est mens momentanea seu carens recordatione*.

Le second de ces principes en entraîne immédiatement un troisième qui domine toute la théorie du hasard. Les forces internes, sous l'influence desquelles se modifie un système, ne dépendent à chaque instant que de sa disposition actuelle; si souvent que celle-ci se représente, à quelque moment du temps que ce soit, elles produiront toujours le même effet et se montreront toujours semblables à elles-mêmes. Il faut donc conclure que les changements de l'ordre purement physique, subis par les corps, sont gouvernés par des « forces permanentes, indélébiles, inhérentes à la matière dans tous les temps et dans tous les lieux » ⁽³⁾. La considération du temps n'intervient pas dans l'énoncé des lois mécaniques. Mais si nous voulons connaître la suite des états par lesquels est passé ou passera un système matériel, ou d'un mot son histoire dans le temps, la connaissance des forces agissantes ne nous suffit plus. Pour calculer ses mouvements, il faut se donner aussi l'état de tous les corps à l'origine du temps. Or, nous ne pouvons le déduire d'aucune loi mécanique générale. Il s'offre

⁽¹⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 172.

⁽²⁾ *Matérialisme*, p. 66.

⁽³⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 275.

à nous comme un *fait*. Nous sommes donc amenés à formuler un troisième principe, rappelé bien souvent par Cournot et dont nous emprunterons l'énoncé à l' « *Essai sur les fondements de nos connaissances* ».

3° « Dans la théorie des mouvements des astres, comme dans la théorie d'un système quelconque, il y a deux choses à considérer : les *forces* auxquelles les corps sont soumis pendant la durée de leurs mouvements et les *données initiales*, c'est-à-dire les positions que les corps occupent et les vitesses dont ils sont animés à une époque d'où l'on part pour assigner, à l'aide du calcul, toutes les phases par lesquelles le système doit passer ensuite » (1).

A la faveur de ces principes, nous pouvons éclairer beaucoup mieux que nous ne l'avons fait jusqu'ici le concept du hasard. Quelles sont les conditions primitivement indépendantes des changements que subit un système mécanique? C'est, d'une part, la loi des forces et, d'autre part, la distribution initiale de ses masses et de leurs vitesses. Car celle-ci est laissée tout à fait indéterminée par celle-là. Imaginons un ensemble de points matériels qui s'attirent suivant la loi de Newton. Aucune règle ne détermine leurs positions relatives et leurs vitesses à l'origine du temps. Il faudra, dans chaque cas, recourir à l'observation pour les connaître. Mais, par cela même que nous serons incapables de les rattacher à aucun principe rationnel, elles nous apparaîtront comme autant de faits fortuits et indépendants les uns des autres. Bien entendu, ce caractère de l'état initial se retrouve dans tous les états successifs du système, puisque, pour expliquer l'un quelconque d'entre eux, il faut remonter jusqu'à lui. Et tous les événements qui résulteront à leur tour des mouvements de ces masses seront à bon droit réputés comme des effets du hasard. Nous jouons à croix ou pile. Quel sera, en fait, le résultat? Une intelligence suffisamment pénétrante pourrait le prévoir, mais à condition de résoudre un problème d'une complication prodigieuse et de rattacher cet effet à la distribution initiale de toutes les masses qui vont avoir une influence directe ou indirecte sur le mouvement de la pièce. D'ailleurs, il ne cesserait de lui apparaître comme aléatoire, puisqu'il dépend de circonstances dont la nature ne pouvait se déduire d'aucune loi générale, mais qui se sont seulement trouvées, en fait, réalisées à l'instant initial. Pour nous qui ne pouvons pas prévoir l'événement, nous estimons à bon droit que croix a autant de chances que pile, parce que les conditions premières dont peut dépendre

(1) *Essai*, t. I, p. 110.

l'un ou l'autre des résultats n'étaient ni plus ni moins possibles les unes que les autres. En somme, c'est à l'origine du temps qu'intervient l'action du hasard, pour s'étendre de là à toute la suite des événements qui procèdent des événements primitifs. Voilà du moins l'idée à laquelle paraît conduire définitivement l'analyse des théories de Cournot et qui se trouve énoncée de façon plus explicite dans quelques passages de ses ouvrages. Nous en reproduisons un très significatif que nous tirons de « *Matérialisme* ». « Il sera permis et même il sera convenable, dit Cournot, de concevoir aussi une cosmologie physique où il n'y aurait lieu de tenir compte que des faits ou des accidents produits par *la disposition initiale des éléments du monde matériel* et par le jeu des forces physico-chimiques, en tant qu'il amène des séries de faits ou d'événements entre lesquels n'existe aucun lien de solidarité » ⁽¹⁾.

Sans doute, il arrive quelquefois que les réactions mutuelles des parties d'un système matériel amènent nécessairement, et quel que soit l'état initial, une harmonie, un ordre régulier dans l'état final. C'est ainsi qu'en vertu des seules lois de la propagation de la chaleur, tous les points d'une sphère métallique homogène présenteront, au bout d'un temps plus ou moins long, la même température, si irrégulière qu'ait été la distribution originelle des températures. Et nous avons déjà cité l'exemple de Leibnitz, celui des deux pendules fixés à une même planchette et qui tendent au synchronisme. Dans tous ces cas, les lois générales de la physique ou de la mécanique suffisent à expliquer l'ordre qui s'établit. Mais aussi l'idée du hasard n'a plus ici aucun objet, puisque son application exige toujours que la forme du résultat dépende des circonstances de fait, et non pas seulement de la loi du système. Il se peut aussi qu'un système mécanique (ce sera par exemple le système planétaire) atteigne à un certain moment ses conditions de stabilité; et que, dès lors, tous ses mouvements se succèdent périodiquement avec une régularité parfaite. A partir de cet instant tout esprit averti cessera de soumettre au calcul des chances les événements dont il est le siège (conjonctions ou oppositions par exemple); quoique peut-être la réalisation des conditions de stabilité elles-mêmes ne soit due qu'au hasard ou à l'épuisement de toutes les combinaisons fortuites ⁽²⁾. Mais, dans tous les autres cas, les faits purement mécaniques donnent prise à la théorie du hasard, malgré la rigueur de leur déter-

⁽¹⁾ *Matérialisme*, p. 72.

⁽²⁾ *Essai*, t. I, chap. V.

minisme, parce que le caractère accidentel des faits initiaux, dont ils dérivent d'ailleurs nécessairement, se retrouve toujours en eux.

La définition du système mécanique va nous permettre de préciser certaines idées importantes, que nous avons déjà exposées d'après Cournot, et en particulier l'opposition capitale qu'il établit entre le fait et la loi ; la cause et la raison des choses. Nous avons déjà dit qu'il y avait dans le fait quelque chose d'irréductible à la loi qui le régit ; ou, si l'on veut, dans la matière quelque chose d'irréductible à la forme. En effet, l'état d'un système matériel à un instant particulier du temps ne résulte pas de la seule forme des lois physico-chimiques ; il dépend de l'état précédent, et celui-ci de l'état qui l'a lui-même précédé, et ainsi de suite. Il faut en un mot, pour en rendre compte, retracer l'histoire de tout le système ; car l'histoire, dont le concept se rattache étroitement à l'idée du temps, a pour objet de reconstituer les phases successives du devenir. Mais elle ne peut être qu'une science imparfaite. Car si loin qu'elle remonte le cours des événements, elle n'observe jamais que des commencements relatifs ; jamais elle ne découvre l'origine absolue des choses.

Tout fait a une cause ; ce n'est pas à dire qu'il ait une raison. Sa cause, c'est l'antécédent qui le détermine, qui lui-même est un phénomène et commence dans le temps. Si nous voulons bien comprendre le caractère d'une explication par les causes, nous ne pouvons rien faire de plus opportun que de comparer l'astronomie des modernes à celle des anciens. L'originalité de celle-là consiste, en effet, dans l'usage d'une nouvelle clef : l'idée de cause. Grâce à cette heureuse hardiesse, elle se rattache désormais à la mécanique. « Les anciens imaginaient certaines combinaisons de mouvements réels pour expliquer les apparences astronomiques ; et, en partant des combinaisons adoptées comme *d'autant de définitions ou d'hypothèses* et des vitesses observées comme d'autant de données numériques, ils assignaient la position des astres à un instant donné, l'époque d'une opposition, d'une quadrature ou d'une éclipse » (1). En un mot, ils rattachaient tous les événements du système à la *forme* qu'ils lui avaient attribuée, et ils ne pouvaient, d'aucun point de vue, considérer aucun d'eux comme un accident. Tous apparaissaient comme des corollaires de la loi générale. Au contraire la mécanique céleste des modernes distingue très nettement la loi formelle des mouvements et le fait de la

(1) *Enchaînement*, t. I, p. 118.

disposition initiale du système, et elle explique les événements astronomiques par leurs antécédents, c'est-à-dire par leurs causes. Du même coup elle pose le problème de l'origine des systèmes et restitue à la donnée historique la part qui lui revient ⁽¹⁾, tandis que, pour les anciens, de pareilles questions ne devaient pas se présenter. « En tant qu'astronomes, ils étaient imbus de l'idée que tous les mouvements des astres sont essentiellement soumis à la loi de périodicité, idée que le retour périodique des saisons, des phases lunaires, des levers et des couchers héliques des étoiles devait si naturellement suggérer à tous les esprits contemplatifs. Et, comme les périodes astronomiques généralement connues, celles qui frappent le commun des hommes, ne ramènent pas exactement tous les astres à leurs premières positions, ils croyaient à l'existence de plus longues périodes et surtout d'une grande année, après la révolution de laquelle tous les mouvements célestes recommenceraient exactement de la même manière et dans le même ordre. Or on voit bien que l'idée d'une telle reproduction périodique et indéfinie dans le passé et dans l'avenir exclut toute idée de commencement et de fin, la rend du moins superflue et dispense de toute recherche à l'égard des questions d'origine » ⁽²⁾. Cette intéressante comparaison entre les deux astronomies des anciens et des modernes montre bien le caractère respectif des explications qui s'appuyent soit sur l'idée de l'ordre et de la forme, soit sur l'idée de la causalité et de la force. La seconde laisse subsister dans les choses la part de l'accident, et la première l'exclut. Pourquoi cette différence? C'est que la seconde pose un problème d'origine que la seconde ignore, et que le hasard justement exerce son action à l'origine des temps.

Nous sommes donc amené à nous demander, pour achever l'analyse du hasard, quelle est l'origine des choses dans le temps. La théorie de Cournot deviendrait très claire, s'il admettait expressément que certaines séries de phénomènes procèdent d'un acte initial contingent ou, en d'autres termes, qu'il y a des commencements absolus. Mais telle n'est pas du tout la pensée de ce philosophe. Le lecteur en est averti déjà. Cournot a des habitudes d'esprit trop scientifiques pour vouloir admettre que rien commence d'exister sans cause. L'idée que la chaîne des causes est suspendue à un fait initial, qui n'est pas lui-même un effet, blesse ses tendances déterministes. Il a besoin, pour fonder la

(1) *Ibid.*, p. 120.

(2) *Ibid.*, p. 121.

théorie des chances, de postuler l'existence réelle du hasard. Mais il ne veut l'admettre nulle part. Et, pour tâcher de concilier ces exigences contraires de son esprit, il rejette à l'infini son point d'application, grâce à l'hypothèse que le devenir est, *a parte ante*, infini dans le temps.

En faveur de cette idée, qui joue, comme on le voit, un rôle important dans sa théorie du hasard, Cournot présente tour à tour deux arguments; l'un qui résulte d'un postulat essentiel de la raison, et l'autre de certaines inductions philosophiques. « S'il est permis à la raison, écrit-il, de concevoir un monde limité dans l'espace, elle ne peut de même le concevoir comme limité dans le temps sans se heurter contre une règle de l'esprit humain, celle qui lui fait regarder les lois de la physique comme immuables, la substance des corps comme indestructible et leurs propriétés fondamentales comme tenant à des caractères indélébiles » ⁽¹⁾. La masse des corps est invariable; elle ne peut augmenter ni diminuer. A plus forte raison est-il impossible de concevoir qu'elle ait été créée tout d'un coup à l'origine du temps. Du moins une telle opération, contraire à toutes les règles de la nature, échappe-t-elle tout à fait aux prises de la pensée humaine, et l'esprit scientifique n'a pas le droit de l'invoquer. De même, des lois que nous concevons comme universelles rattachent chaque phénomène à des phénomènes antécédents. Nous ne pouvons admettre qu'elles aient été démenties, à l'origine des choses, du fait d'un commencement absolu. Ainsi « la chaîne des temps aurait son milieu partout et ses bouts nulle part; à quelque anneau de la chaîne qu'on s'accrochât, on aurait l'infini devant soi et derrière soi. Cela ne peut pas s'imaginer, sans doute, mais cela est parfaitement intelligible » ⁽²⁾. Et Cournot, qui a d'abord dans l'*Essai* ⁽³⁾ adhéré à la théorie kantienne, se reprend dans ses autres ouvrages et affirme que dans le problème des origines « il n'y a aucune antinomie pour la raison » ⁽⁴⁾.

Pour le montrer il recourt aussi à une induction assez curieuse. Si tous les phénomènes se succédaient irrégulièrement, comme font les vents et les tempêtes, les tremblements de terre et les éruptions volcaniques, les chutes de bolides et les pluies d'étoiles filantes; s'il était tout à fait impossible de discerner dans les

⁽¹⁾ *Enchaînement*, I, p. 299.

⁽²⁾ *Matérialisme*, p. 83.

⁽³⁾ *Voy. Essai*, I, p. 312.

⁽⁴⁾ *Matérialisme*, p. 83.

séries qu'ils forment aucun ordre périodique, aucune loi générale, nous devrions nécessairement conclure qu'ils ont toujours présenté le même caractère chaotique, et nous n'aurions aucune raison de penser qu'aucune de ces séries a eu un commencement dans le temps et que l'un de ses termes, par une sorte de privilège que rien n'explique, en a été le terme initial ⁽¹⁾. Mais, dans le monde qui nous est donné en spectacle, la régularité domine. Nous observons tantôt une progression constante, tantôt le retour périodique des mêmes événements. Toutefois, pour donner une explication scientifique de l'ordre ainsi manifesté dans la nature, sans recourir à aucun principe de finalité, il faut toujours supposer qu'il ne s'est réalisé que graduellement et que la phase actuelle a été précédée d'une phase chaotique pendant laquelle les phénomènes se sont succédé irrégulièrement, « jusqu'à l'apparition d'une combinaison singulière qui se prêtât à la naissance d'un ordre régulier, par le jeu des forces internes et par les réactions mutuelles entre les différentes parties du système » ⁽²⁾. « Remarquons bien, ajoute Cournot, cette condition d'une combinaison singulière pour sortir de l'état chaotique et pour naître à l'état de système ordonné. Elle doit même être si singulière qu'il faille, pour rendre raison de son apparition, l'infinité *a parte ante* du temps chaotique. Car autrement on ne s'expliquerait pas pourquoi l'état chaotique n'a pas cessé plus tôt, pourquoi nous n'observons pas actuellement l'état final en tout et partout. Il y aurait alors effectivement une antinomie au sens de Kant : la raison ne pouvant rendre compte de la tardive apparition de l'état final, qu'en admettant le commencement du monde et la création *ex nihilo*, c'est-à-dire en sortant du cercle des opérations naturelles, assigné aussi comme limite à la compétence de la raison » ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Le passage de « *Matérialisme* » que nous analysons ici est assez obscur. Il est difficile de démêler l'argument précis de Cournot. Son but est de montrer que l'antinomie kantienne n'est pas fondée en ce qui concerne le temps. Voici la partie la plus importante du texte. S'il n'y avait que des phénomènes se succédant irrégulièrement, « il serait simple d'admettre que la série actuellement irrégulière et chaotique a toujours offert et offrira toujours ce caractère d'irrégularité, cette apparence de chaos... La chaîne du temps aurait « son milieu partout et ses bouts nulle part » : à quelque anneau de la chaîne qu'on s'accrochât, on aurait l'infini devant soi et derrière soi ». Nous avouons ne pas très bien comprendre comment du caractère chaotique résulte l'infini dans le temps. Cournot veut-il dire que dans une série irrégulière aucun terme n'est désigné pour être le premier; qu'il n'y a aucune raison suffisante pour qu'il le soit? C'est l'interprétation que nous avons risquée. Mais de toute façon l'argument reste obscur et peu décisif.

⁽²⁾ *Matérialisme*, p. 84.

⁽³⁾ *Matérialisme*, p. 85.

Ainsi les exigences de l'explication scientifique nous obligent à admettre que le monde est infini dans le temps. Ce n'est pas ici le lieu de discuter les arguments de Cournot et d'éprouver s'ils résolvent en quelque manière les antinomies kantienne. L'un d'eux ne fait que développer, sous une forme un peu différente, l'antithèse de la troisième antinomie. L'autre paraît, à vrai dire, plus ingénieux que solide. Mais nous voulons seulement rechercher quelle influence la conception de l'infini du monde *a parte ante* dut exercer sur la théorie du hasard. D'après nous, elle en a masqué à Cournot lui-même les principales difficultés.

Qu'est-ce qu'un fait contingent ? Un fait qui se produit et qui aurait pu ne pas se produire. On n'échappera point, croyons-nous, à l'obligation de le définir ainsi. Dans la théorie des chances, on considère des *possibles* également *possibles* dont l'un se *réalisera* à l'exclusion des autres, et, si cette expression n'a pas de sens, le calcul des probabilités ne peut pas en avoir non plus. Mais comment comprendre qu'on attribue à un même événement les prédicats du réel et du possible, sans se placer pour le faire à deux moments différents du temps ? Il faut, en un mot, que l'événement ait été d'abord simplement possible, puis qu'il se soit réalisé à un certain instant. Par conséquent on se voit contraint d'attribuer la production des faits fortuits à l'influence de causes qui agissent dans le temps et dont l'action reste jusqu'au dernier moment indéterminée. Mais Cournot n'a pas reconnu cette nécessité. L'idée d'un commencement absolu dans le temps lui paraît absurde et il s'efforce de concilier le déterminisme phénoménal avec l'existence objective du hasard. Nous verrons tout à l'heure s'il pouvait réussir dans sa tentative. Examinons d'abord quelle serait la portée de ce succès.

En somme, Cournot se borne à rapporter à la série entière des causes, conçue comme infinie, le caractère contingent qui affecterait son premier terme dans l'hypothèse d'un commencement absolu. Mais où est le bénéfice ? Sans doute le principe de causalité est sauvé ; mais le principe, bien plus essentiel, de raison reste violé, puisque le monde, celui du moins où se déroulent les combinaisons du hasard, nous apparaît dans son ensemble comme un vaste accident. Chaque détail a sa cause dans un autre détail. Mais le tout n'a pas de cause. Certes l'imagination s'épuise à parcourir la suite infinie des antécédents ; et l'esprit qui, dans l'intervalle embrassé, aperçoit toujours la liaison des phénomènes, s'arrête de poser des questions, si bien qu'il oublie que cet enchaînement, si régulier dans ses parties, est dominé tout entier par le hasard. Tel est

le genre de satisfaction que procure à l'esprit l'infinité du temps bien lié. Il « se lasse plutôt de concevoir que la nature de four-nir ». Et l'accident qui se dissimule dans un recul infini cesse de l'inquiéter en raison de son éloignement. Occupé sans repos à éprouver la sûreté de chaque chaînon, il oublie de se demander comment se soutient la chaîne sans fin des phénomènes. Mais une théorie philosophique ne peut avoir pour but d'endormir l'esprit dans une fausse sécurité.

Prenons conscience de la part que conserve l'accident inintelligible dans la théorie de Cournot. Supposez que nous choissions *au hasard* un nombre x , et que nous le prenions pour base d'une progression géométrique infinie dans les deux sens :

$$x^{-n} \dots x \ x^2 \dots x^n$$

Chaque terme dépend régulièrement de celui qui le précède. Mais la loi de la série laisse tout à fait indéterminée la valeur de x ; et celle-ci, par hypothèse, n'est qu'une donnée fortuite. Tel est le symbole par lequel on peut se représenter la chaîne des causes se déroulant dans le temps infini. Il y a un x dont la raison ne peut lever l'énigme. Ou, si l'on veut un exemple plus concret, à supposer que les transformations d'énergie s'accomplissent selon des lois bien déterminées dans un système conservatif, la valeur de la quantité constante d'énergie qui s'y emploie n'en resterait pas moins mystérieuse, parce que le mystère durerait depuis un temps infini. Aussi Cournot n'est-il pas parvenu à expliquer d'une façon aussi satisfaisante qu'il le croit, comment la prescience divine — où il cherche souvent le critère du déterminisme — s'accommode de l'existence objective de l'accident.

Sans doute il a raison de remarquer que, dans son hypothèse, une intelligence divine pourrait prévoir avec sûreté tous les événements qui doivent s'accomplir dans le monde, sans qu'il lui fallût pourtant cesser de considérer certains d'entre eux comme fortuits. Tous les moments du devenir se commandant les uns les autres, elle lirait le futur dans le présent, et le présent dans le passé. Mais, si l'on attribue au hasard la même part que Cournot dans le gouvernement du monde, on est bien obligé d'accorder que, pour effectuer ses calculs, elle devrait demander à l'expérience la connaissance de l'état du monde à un instant particulier du temps. La science divine elle-même ne pourrait échapper aux conditions de l'empirisme. Il ne servirait à rien de soutenir que Dieu connaît les choses dans l'acte même par lequel il les crée. Car il n'en resterait pas moins vrai qu'il devrait se représenter

lui-même la création du monde matériel comme un décret contingent de sa volonté qu'auraient laissé indécis les lois de sa raison. L'influence du hasard sur les phénomènes est à ce prix. En sorte que, de toute façon, Dieu ne connaîtrait son œuvre que comme une sorte de fait. D'ailleurs, si Cournot avait cherché à compléter par de telles hypothèses sa théorie du hasard, la tâche n'eût pas été sans de sérieuses difficultés, puisqu'il aurait fallu concilier la liberté divine et la détermination phénoménale. Le problème à résoudre eût d'ailleurs présenté de frappantes analogies avec celui qui s'imposa à l'esprit de Kant, après que la liaison causale lui fut apparue comme la condition de la pensée, tandis que la liberté et l'autonomie étaient celles de la volonté morale. Pour lever l'antinomie, il dut assigner aux lois de la science et à celles de la conscience deux domaines distincts, le monde sensible et le monde intelligible, dont l'un d'ailleurs restait subordonné à l'autre. Et s'inspirant peut-être de l'idée chrétienne de la chute, il supposa que chaque homme avait choisi une fois pour toutes son caractère empirique avant de descendre dans le temps. On pourrait, par une méthode analogue, chercher dans l'acte supra-sensible de la création la source primitive du hasard et attribuer à la décision contingente de la volonté souveraine le choix de ces conditions particulières qui, de concert avec les lois fondamentales de la mécanique, déterminent l'histoire des systèmes matériels. Mais, dans la voie que nous indiquons, on n'échapperait pas à la nécessité d'expliquer par une action contingente, analogue à celle d'une volonté libre, l'existence dans le monde des événements contingents. D'ailleurs nous avons signalé nous-même, au commencement de cette discussion, la difficulté qu'il y aurait à situer une pareille action hors du temps, puisqu'alors on ne saurait plus distinguer les moments où se posent tour à tour la puissance indéterminée et l'acte qui la détermine.

Mais Cournot est-il disposé à faire les hypothèses métaphysiques que nous venons d'ébaucher sommairement et qui expliqueraient, en dépit du déterminisme universel, l'existence objective de l'accident ? Par les textes que nous avons cités, le lecteur est prévenu du contraire. A vrai dire, lorsqu'il touche aux problèmes métaphysiques — il ne le fait jamais d'ailleurs qu'avec une extrême réserve — notre philosophe prend presque toujours le contre-pied des théories par lesquelles semblerait se compléter en bonne logique sa définition du hasard. C'est ainsi que, dans sa pensée, l'idée de cause n'a plus d'objet aux yeux de l'intelligence souveraine, parce que la cause c'est sa volonté et que sa volonté

c'est sa raison. Il conçoit Dieu comme une raison pure, et se donne alors pour tâche d'expliquer comment, dans un monde absolument intelligible, puisqu'il émane tout entier de la raison, il y a encore place pour le fortuit. C'est bien en ces termes paradoxaux, croyons-nous, que le problème se pose pour lui en dernière analyse. Et c'est pourquoi il attache une importance de plus en plus grande à la discussion de certains faits mathématiques, capables de nous donner une idée de la place qu'occupe encore le hasard dans l'ordre rationnel. Mais nous réserverons l'étude de ce point capital pour la dernière partie de notre travail.

Cependant le lecteur pourra croire que, dans la critique précédente, nous avons été infidèle à la véritable pensée de Cournot. Nous avons transporté la discussion dans le domaine métaphysique où notre philosophe se refuserait sans doute à nous suivre. Il a, en un sens, l'esprit trop *positif* pour chercher le fondement d'une définition du hasard dans une théorie de la création. Il n'aime pas s'écarter du terrain solide des faits, et la méthode qu'il emploie est celle de l'induction. Elle le conduit inévitablement, pense-t-il, au concept de l'indépendance des causes, lequel peut supporter, à lui tout seul, une théorie des chances débarrassée de toute hypothèse métaphysique. Reconnaissons donc les véritables intentions de Cournot et recherchons si sa méthode ainsi conçue pouvait aboutir.

« L'idée d'un fait accidentel n'implique pas l'hypothèse absurde d'un effet sans cause ». Chaque état d'un système résulte, en toute nécessité, de l'état immédiatement antérieur ; et, si haut que nous remontions le cours du temps, nous verrions le présent sortir du passé, sans que la trame des phénomènes se montrât jamais rompue. Et cependant dans l'ordre des faits purement mécaniques, chacun des résultats qu'amène le jeu des forces nécessaires conserve le caractère d'un accident, parce qu'il se présente à nous comme un simple fait, conséquence d'un autre fait antécédent, lequel résulte lui-même d'un troisième et ainsi de suite, sans que jamais, en remontant la série des conditions, l'esprit puisse rencontrer une condition pleinement intelligible en elle-même, ou, pour employer le langage de Kant, une condition inconditionnée. En effet, l'analyse de la causalité mécanique et la distinction de la loi et du fait, sur lesquelles Cournot fonde sa théorie du hasard, tiennent lieu, en un sens, des arguments par lesquels Kant démontre l'impossibilité où nous sommes d'atteindre l'absolu. Seulement Cournot ne se borne pas à constater cette infirmité de l'esprit humain. Il postule l'existence objective du hasard, qui conserve-

rait sa juridiction au regard d'une intelligence assez puissante pour pénétrer les choses jusque dans leur fond.

Mais a-t-il le droit de le faire ? La conclusion ne dépasse-t-elle pas singulièrement les prémisses ? Et le même argument qui, dans les mains de Kant, servait à la condamnation de toute métaphysique future pourra-t-il, repris par Cournot, consacrer la vérité métaphysique du hasard ? On aura beau dire, en effet, avec ce philosophe que le hasard n'est pas une « entité » mais une « simple idée », cette distinction paraîtra subtile et vaine si cette idée n'est pas « relative en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance » et si elle prétend exprimer le caractère absolu des faits. Que la synthèse de toutes les conditions soit impossible pour l'esprit humain, est-on autorisé à conclure qu'elle est impossible en soi ? Et l'indépendance, que conservent à nos yeux les phénomènes, en raison justement de l'imperfection de nos synthèses, pourra-t-elle légitimement se transformer en une indépendance absolue ? Mais surtout, et c'est là le principal reproche que nous ferons à Cournot, croit-on que le concept de l'indépendance — très clair tant qu'il n'exprime que notre ignorance — conserve un sens intelligible quand on l'érige en absolu, sans que d'ailleurs on détermine en aucune manière la nature des causes capables de produire des séries de faits indépendants les uns des autres ? Examinons de plus près ces difficultés.

Cournot, avons-nous dit, se confie à la méthode inductive pour établir l'idée du hasard, en même temps que son opposé l'idée de la loi. Quand nous considérons les phénomènes dans leur forme (par exemple la loi des forces pour un système mécanique), nous y découvrons un ordre où notre raison se reconnaît elle-même, qu'il nous est impossible de concevoir comme le résultat de combinaisons fortuites et que nous réputons à bon droit inhérent à la nature des choses. « Sur quelque objet que portent nos observations, ce qui nous frappe d'abord, ce que nous saisissons le mieux et le plus vite, c'est la forme et, comme la remarque est on ne peut plus générale, il semble qu'à ce titre seul la forme aurait dû être inscrite par les philosophes en tête de toutes les listes qu'ils ont dressées des catégories » ('). Lorsqu'au contraire nous observons les phénomènes dans leur matière (par exemple la distribution des masses et des vitesses), s'ils ne portent point la marque de la finalité et sont le produit de la seule causalité mécanique, nous n'apercevons plus en eux aucune ordonnance que

(') *Enchaînement*, t. I, p. 1.

nous puissions ériger en loi de la nature. Nous dégageons donc par abstraction la forme de la matière, et dès lors elles nous apparaissent comme indépendantes l'une de l'autre, puisqu'elles présentent des caractères opposés. La matière par hypothèse exclut l'idée de toute loi régulière : c'est dans l'analyse des phénomènes le résidu où la raison n'a pu se retrouver. Mais la définir ainsi c'est exactement la définir comme un effet du hasard. L'idée du hasard dans la philosophie de Cournot reste au fond négative. Elle est l'antithèse de l'ordre, et nous l'appliquons là où l'ordre ne nous apparaît pas.

Mais on pourrait faire deux objections bien graves. D'abord, disposons-nous d'un critère précis qui nous permette de distinguer la forme régulière de la distribution sporadique? La philosophie inductive de Cournot n'en connaît d'autre que celui de la simplicité. Mais où la simplicité commence-t-elle, où finit-elle? Comment classer les formes d'après leur degré relatif de simplicité? Si nous nous posons la question dans le cas le plus facile, celui des lignes géométriques, nous reconnaitrons bien vite, d'après la remarque de Cournot lui-même, qu'elle ne comporte pas de solution. Comme on peut adopter tour à tour plusieurs points de vue différents, sans qu'aucun d'eux s'impose à nous, nous sommes obligés de conclure « que toute classification de lignes, sous ce rapport, n'est qu'artificielle, soit qu'on se règle sur le degré de leurs équations, sur le nombre de termes qui les composent, sur celui des paramètres qui y entrent, etc. » (1). A vrai dire, on passe de l'ordre au désordre par degrés insensibles. A-t-on, dès lors, le droit d'opposer le hasard à la loi et de les concevoir comme deux principes absolument irréductibles qui tous deux, à leur manière, gouvernent le monde? En un mot, la méthode inductive de Cournot ne nous procure pas des concepts assez nettement définis, assez complètement analysés pour que nous puissions décider si chacun d'eux représente un procédé original de la nature.

En second lieu, lorsque nous n'apercevons dans les phénomènes aucune liaison apparente, sommes-nous en droit de conclure qu'il n'y en a point? L'ordre ne se révèle souvent qu'à un examen plus attentif, une observation plus étendue. Et celui qui suivrait, sans en connaître les lois, la partie d'échecs la mieux conduite, n'y verrait qu'un mouvement incohérent de pièces. En un mot, n'expliquons-nous point par le hasard ce que nous ne savons

(1) *Théorie des chances*, p. 438.

point expliquer? L'idée de l'accident n'est-elle pas « relative à notre ignorance »? Rien dans la théorie de Cournot ne nous permet expressément d'en décider, quoiqu'elle soit justement conçue pour établir l'existence objective du hasard. Toutes ces difficultés tiennent à une même cause. Dans cette théorie qui veut être positive et se dégager de toute hypothèse métaphysique, l'idée de l'indépendance entre le fait et la loi, la matière et la forme, est plutôt affirmée que démontrée. Elle ne résulte du moins que d'une épreuve négative : le hasard n'est que l'élément des phénomènes apparemment rebelle à l'analyse rationnelle. Alors, malgré les efforts de Cournot, sa théorie ne paraît pas très loin de se confondre avec celle de Hume et de Laplace.

On a rapproché avec raison la conception que Cournot s'est faite du hasard de celle d'Aristote (¹). Et, en effet, certaines formules aristotéliennes pourraient servir à résumer les idées du philosophe moderne. La connaissance de la forme laisse toujours indéterminés les caractères propres aux faits individuels; l'individualisation se fait par la matière, et tout ce qui dans les choses résulte de l'influence de celle-ci échappe à toute autre science que celle des chances et des probabilités. Πᾶσα ἐπιστήμη τῶν καθόλου. Cependant, il faut craindre dans ce rapprochement de préciser la pensée de Cournot plus qu'il ne l'a fait lui-même. Il manque à sa définition du hasard de s'appuyer sur un solide fondement métaphysique; car jamais, pour en parfaire l'analyse, il ne s'est mis en face des notions de la matière et de la forme, et n'a marqué nettement leur rapport et leur opposition. Aussi ses conclusions conservent-elles inévitablement quelque chose de fuyant. Il se serait même certainement refusé à faire de la matière un principe positif, et il aurait dit d'elle, comme il l'a fait du hasard, qu'elle n'est pas une véritable entité, mais une simple idée. C'est le *résidu* que laisse subsister *en fait* notre science de la nature quand nous avons fait tous nos efforts pour en saisir l'ordre, la forme et la loi. Une logique sans métaphysique ne saurait en dire rien de plus.

Mais alors une incertitude irrémédiable demeure; et l'on peut se demander si cette distinction que nous faisons entre la matière et la forme, la loi et le fait ne résulte pas de notre seule ignorance. Sans doute nos lois toutes seules ne parviennent jamais à déterminer les caractères spécifiques d'aucun fait. S'il en était autrement, nous n'aurions plus le loisir de faire plusieurs conjec-

(¹) Voy. Milhaud, *Le hasard chez Aristote et chez Cournot*. Rev. de mét. et de mor., nov. 1902.

tures et le concept du hasard n'aurait certainement plus d'objet. Mais la réciproque est-elle vraie? Suffit-il de remarquer que le fait est analytiquement irréductible à nos lois générales, pour être en état d'affirmer qu'il y a du hasard dans les choses et surtout pour en comprendre aussitôt la nature et le mode d'action? Sans doute, quand on se sert, pour expliquer les choses, des concepts abstraits, comme ceux-ci n'embrassent point dans leur compréhension tout le détail de l'objet, on aperçoit plusieurs hypothèses qui semblent également possibles. Mais l'idée de cette égale possibilité, *relative à un certain degré d'abstraction*, disparaîtrait peut-être dans une connaissance plus approfondie et plus concrète. C'est ainsi que dans la philosophie de Leibnitz, tant que nous n'appliquons que le principe logique de contradiction, nous découvrons une infinité de mondes possibles. Mais dès que nous nous confions au principe du meilleur, nous comprenons que, parmi tous ces mondes hypothétiques, le plus parfait seul pouvait et devait nécessairement se réaliser. Les autres ne jouissaient que d'une possibilité abstraite et logique. Lui seul était possible eu égard à la volonté de Dieu.

Y a-t-il du hasard dans les choses? C'est se demander s'il existe des faits *absolument indépendants* les uns des autres. Or, à une pareille question la méthode de la philosophie inductive ne permet pas de répondre. Elle appartient inévitablement à la métaphysique, parce que la solution exige que l'on suppose le résultat d'une analyse complète du réel, qu'on s'élève à l'intelligence de la cause première. Mais sur la nature de cette cause on ne peut faire semble-t-il que deux hypothèses opposées, auxquelles correspondent deux conceptions opposées du hasard. Ou bien l'on peut admettre qu'elle détermine sans ambiguïté tous les phénomènes concrets et leurs modes d'association. Alors l'apparence du hasard ne tient qu'à notre ignorance, ou plutôt à notre science incomplète, qui ne pénètre pas au cœur de la réalité et ne saisit que les relations formelles des choses. Cette interprétation se rattache à celle de Laplace. Ou bien l'on peut supposer que les phénomènes auraient vraiment pu se grouper autrement qu'ils ne l'ont fait, parce que, plusieurs modes d'association étant également possibles, l'un d'eux s'est réalisé en fait par l'action contingente d'une cause dont on sera presque nécessairement amené à chercher le modèle dans la volonté d'un être conscient, puisque celle-ci paraît tenir l'avenir en suspens et choisir, par un fiat du libre arbitre, entre les différents motifs de conduite, lorsqu'ils s'opposent les uns aux autres. Telle est la conception de Renouvier. Cournot, qui

voudrait concilier le déterminisme et le hasard, cherche une solution intermédiaire. Mais suivant nous il ne réussit pas à la trouver. Et sa théorie marque une position d'équilibre instable entre celle de Laplace et celle de Renouvier, qui seules sont logiquement inattaquables. S'il précisait jusqu'au bout sa pensée, il retomberait nécessairement sur l'une ou sur l'autre. Mais il ne pose pas le problème du hasard sur son véritable terrain. Il ne se demande pas comment s'accomplit, en dernière analyse, la combinaison des causes qui nous paraissent indépendantes ; question à laquelle il faudrait bien répondre que c'est sous l'action d'une cause initiale déterminante ou libre, car il n'y a pas d'autre alternative. Si d'ailleurs il détourne sa pensée de cette question capitale, c'est qu'il considère comme infinies la suite des temps et la chaîne des causes particulières, et rejette ainsi à l'infini — ce qui ne veut pas dire qu'il le supprime — le problème de ces données de fait, qui doivent être jointes aux lois générales de la nature pour déterminer jusque dans son détail la courbe du devenir. C'est parce qu'il jette un voile sur le problème des origines qu'il peut soutenir des thèses apparemment contradictoires, distinguer la loi et le fait, et admettre que celui-ci est absolument irréductible à celle-là, sans supposer qu'il existe en aucun point du monde, ni même hors du monde, des centres d'actions indéterminées et imprévisibles ; soutenir que le hasard gouverne le monde, et que néanmoins Dieu, conçu comme une raison pure, prévoit toute la suite des événements ; affirmer que tout est nécessaire, et que certains phénomènes sont pourtant fortuits. C'est parce qu'il oscille, sans se fixer jamais, entre l'interprétation de Laplace et celle de Renouvier, qu'il croit pouvoir mettre d'accord le déterminisme et le hasard.

IV

Le hasard dans l'ordre des faits intelligibles.

Lorsque Cournot cherchait les preuves de sa théorie du hasard dans l'analyse de la causalité physique, il ne pouvait atteindre aucun résultat décisif. En effet, puisque nous ne nous élevons jamais à la connaissance inconditionnée d'aucun phénomène, puisque nous n'en saisissons jamais la cause première, nous sommes incapables de juger en dernier ressort quels événements sont absolument indépendants les uns des autres et pourquoi ils le sont. Il nous appartient seulement de constater qu'en l'état de nos connaissances nous n'apercevons entre certains d'entre eux aucun rapport de solidarité. Mais notre philosophe pouvait au contraire, semble-t-il, espérer une consécration définitive de sa théorie, s'il parvenait à l'appliquer « à l'ordre des conceptions purement abstraites, où les faits se produisent par une nécessité de raison, et non par des causes efficientes comme celles qui agissent dans la production des phénomènes » ⁽¹⁾. Ici, en effet, nous nous référons à des faits entièrement intelligibles et qui se prêtent à une analyse parfaite. L'indépendance des raisons ne doit plus rien conserver d'obscur. Elle n'est plus relative à l'état de nos connaissances, et nous devons comprendre distinctement quelle est d'influence qu'elle exerce.

Cournot se flatte donc de découvrir dans les « faits purement intelligibles, rationnels et nécessaires » eux-mêmes des traces authentiques du hasard. Et, pour illustrer sa pensée, il cherche à démontrer que la distribution des chiffres dans l'expression décimale des nombres incommensurables les plus usuels, comme π ou comme e , présente tous les caractères de la fortuité « bien que la place de chaque chiffre y soit certainement déterminée par des raisons mathématiques » ⁽²⁾. C'est que la définition de la grandeur qu'on mesure reste tout à fait indépendante du système

⁽¹⁾ *Essai*, t. I, p. 57, note.

⁽²⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 63.

arithmétique dont on fait usage pour en trouver une expression numérique. En sorte que, dans la pensée de Cournot, toutes les conditions nécessaires à l'intervention du hasard se trouvent ici réunies.

Nous venons d'indiquer l'importance de cette nouvelle application du concept de l'indépendance. On ne sera donc pas étonné qu'elle tienne de plus en plus de place dans les préoccupations de Cournot. Il n'en est pas encore question dans la « *Théorie des chances* », le premier en date de ses ouvrages. Elle ne donne lieu qu'à une courte note dans l'« *Essai* », publié en 1851. Mais de longs développements lui sont au contraire réservés dans l'« *Enchaînement des idées fondamentales* » qui est de 1861, et dans « *Matérialisme* », où il resserre « dans un volume de petit format » toute sa pensée philosophique. A mesure que les idées de Cournot se précisent ces exemples mathématiques du hasard passent au premier plan. Nous devons donc y chercher plus qu'une application piquante et paradoxale de sa théorie. Ils nous en livrent, au contraire, la formule définitive. Et l'on ne risque pas de s'en exagérer la portée, puisque ce philosophe veut établir que « notre science des causes pourrait se perfectionner au point de ramener la théorie du monde à n'être qu'un théorème de mathématiques, sans que ce perfectionnement fit évanouir l'idée de fortuité et ses conséquences rationnelles ». D'ailleurs, on peut prévoir que, dans cette nouvelle application, les idées de Cournot doivent se modifier profondément. Pour expliquer le caractère contingent des faits physiques, il invoquait en fin de compte leur caractère empirique : ils ne se laissent déduire d'aucune loi générale et, dans l'étude d'un système matériel, on est toujours obligé de demander à l'observation la connaissance des circonstances initiales. Mais, quand il s'attache aux faits intelligibles et s'efforce de comprendre pourquoi il découvre encore en eux les symptômes de la fortuité, Cournot n'a plus la même ressource. Nous verrons alors si le concept de l'indépendance peut se préciser jusqu'au bout et supporter à lui seul toute la théorie du hasard. *A priori* cette extension du calcul des chances à l'ordre rationnel nous apparaît comme une gageure. Mais il importe de l'examiner de très près : car c'est l'épreuve décisive au cours de laquelle la conception de Cournot doit clairement nous révéler sa solidité ou son inconsistency.

« Vers la fin du xvi^e siècle, écrit-il, on ne faisait pas seulement en Hollande du calvinisme et du commerce ; on s'y occupait beaucoup de la quadrature du cercle, et la veuve de Ludolph van Ceulen

publia et fit graver sur la tombe de son mari, dans une église de Leyde, le rapport de la circonférence au diamètre, avec les 35 décimales trouvées par ce laborieux calculateur :

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288.

» D'autres calculateurs intrépides ⁽¹⁾ ont eu, dit-on, la patience d'aller (par des méthodes à la vérité moins pénibles) jusqu'à quatre ou cinq cents décimales, et théoriquement rien n'empêcherait de pousser le calcul aussi loin qu'on le voudrait.

» Or, dans cette longue série, les chiffres se succéderaient, comme on en peut juger par l'échantillon de Ludolph, aussi irrégulièrement qu'au loto; les écarts de la moyenne théorique $4\frac{1}{2}$ tomberaient tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, et iraient en s'atténuant de même, soit que l'on prolongeât un calcul si pénible, ou un jeu si puéril. Il en serait de même pour tous les autres symptômes de fortuité. Si par exemple l'on écrit les 36 chiffres de Ludolph en souscrivant chaque chiffre du signe + ou du signe — suivant qu'il est supérieur ou inférieur au chiffre qui le précède, on observera 21 changements de signe, c'est-à-dire le rapport $\frac{7}{12}$ entre le nombre des changements de signe et le nombre de signes de la série, ce qui peut passer pour une très satisfaisante approximation du rapport limite $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$, assigné par l'un des curieux théorèmes de mon excellent ami, M. J. Bienaymé, de l'Académie des sciences » ⁽²⁾.

« Il y a autant de chiffres impairs que de chiffres pairs (le zéro étant compris dans les chiffres pairs eu égard à son rang), tandis que nous trouvons sur notre exemple qu'il y a 18 apparitions de chiffres pairs (deux de moins que la moitié). Mais si l'on opérait successivement sur des centaines, des milliers, des myriades de chiffres dans la série suffisamment prolongée, on trouverait que le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre total des chiffres calculés approche de plus en plus d'être égal à la fraction $\frac{1}{2}$ et n'en diffère en fin de compte que par des fractions d'une extrême petitesse » ⁽³⁾.

Ainsi la succession des chiffres dans l'expression décimale de π présente les caractères habituels de la fortuité. Sans doute « chaque chiffre de la série, si reculé qu'en soit le rang, doit être considéré comme ayant actuellement, comme ayant eu de tout temps une valeur rigoureusement déterminée, quoique nous ne la

⁽¹⁾ En particulier le géomètre Lambert (voy. *Essai*, t. I, p. 97, note).

⁽²⁾ *Matérialisme*, p. 311 et suiv.

⁽³⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 99.

connaissions pas et que nous n'ayons même aucun intérêt à la connaître » ⁽¹⁾. Mais néanmoins il serait impossible d'assigner aucune règle générale à la répartition des chiffres, comme on peut le faire par exemple dans le cas d'une fraction décimale périodique. Et comme la loi n'est que « l'ordre de la succession régulière », il faut convenir que cette série « n'est pas propre à nous donner l'idée d'une loi » ⁽²⁾.

Expliquons maintenant pourquoi, dans cette expression mathématique, les chiffres se succèdent aussi irrégulièrement qu'au loto. Le rapport de la circonférence au diamètre résulte nécessairement de la définition de ces grandeurs, et sa valeur n'a rien d'accidentel. Mais il n'en est plus de même de son expression numérique. En effet « l'application que nous faisons des nombres à la mesure des grandeurs (continues) est sans doute un artifice de notre esprit » ⁽³⁾. Pour mesurer numériquement l'une d'elles, il faut d'abord choisir une grandeur *arbitraire* que l'on prend pour unité; puis convenir d'une loi *quelconque* d'après laquelle on divisera et subdivisera l'unité en autant de parties aliquotes qu'il sera nécessaire pour obtenir l'approximation que l'on veut. « Les grandeurs continues, ainsi exprimées numériquement au moyen d'une unité arbitraire ou conventionnelle, passent à l'état de quantités ou sont ce que l'on appelle des quantités. Ainsi l'idée de quantité, toute simple qu'elle est, et quoiqu'elle ait été considérée généralement comme une catégorie fondamentale ou une idée primitive, n'est point telle effectivement; et l'esprit humain la construit au moyen de deux idées vraiment irréductibles et fondamentales, l'idée de nombre et l'idée de grandeur » ⁽⁴⁾. Bien que les concepts mathématiques fondamentaux expriment des rapports généraux impliqués dans la nature des choses et qu'ils ne soient point des produits artificiels de l'entendement humain, « il ne s'en suit point que toutes les parties des mathématiques soient affranchies de conceptions artificielles qui tiennent moins à la nature des choses qu'à l'organisation de nos méthodes » ⁽⁵⁾. Pour obtenir l'expression décimale de π en particulier, nous *convenons* d'abord de diviser le diamètre en un nombre de parties aliquotes égal à une certaine puissance de 10 et de chercher combien de fois l'une de ces parties est conte-

⁽¹⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 98.

⁽²⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 64.

⁽³⁾ *Essai*, t. I, p. 326.

⁽⁴⁾ *Essai*, t. I, p. 394.

⁽⁵⁾ *Essai*, t. I, p. 326.

nue dans la longueur de la circonférence. La mesure repose donc sur une première *convention*. En outre, l'arithmétique décimale a eu pour objet de créer un système de règles syntaxiques qui permettent par la combinaison des dix signes que sont nos chiffres de représenter un nombre si grand qu'il soit. « Le système de la numération décimale, écrit Cournot, la théorie des courbes de Descartes, et l'algorithme infinitésimal de Leibnitz ne sont au fond que trois grands pas faits dans l'art d'appliquer des signes conventionnels à l'expression des rapports mathématiques régis par la loi de continuité » ⁽¹⁾.

On comprend alors pourquoi la distribution des chiffres dans l'expression numérique de π présente une forme irrégulière. L'ordre dans lequel ils se présentent n'est en effet qu'un accident. Quand nous disons que la somme des angles internes d'un polygone vaut $2(n - 2)$ droits, nous énonçons une relation nécessaire et qui n'est subordonnée à aucune condition. Mais, au contraire, le groupe de signes, par lequel nous représentons, avec une approximation donnée, le rapport de la circonférence au diamètre, dépend du modèle sur lequel se trouve construite notre arithmétique et changerait du tout au tout si nous changions de modèle. Comme celui-ci est tout à fait *indépendant* de la grandeur géométrique à mesurer, et que sa forme concourt néanmoins avec la valeur de celle-ci à déterminer la combinaison des chiffres, nous devons assimiler cette dernière à un événement fortuit. L'observation de leur succession irrégulière confirme ce jugement. Le calcul de π , dans le système de la numération décimale, est donc « un terrain mixte sur lequel s'opère la combinaison, le *mariage* de deux arithmétiques bien distinctes l'une de l'autre : l'une où l'on considère les propriétés des nombres telles qu'elles existent indépendamment de tout système artificiel de numération, l'autre dont les règles se réfèrent à l'emploi de nos signes et à l'artifice de notre numération décimale. D'une part, les approximations successives du rapport cherché ont une loi, une forme théorique et régulière, indépendante du système de numération ; d'autre part, pour mettre ces approximations en chiffres, il faut suivre les règles de notre arithmétique décimale. En un mot, et sans insister sur les détails techniques, il y a concours de deux ordres de faits rationnels indépendants l'un de l'autre, ce qui doit produire les caractères habituels de la fortuité » ⁽²⁾. On pourrait dire, en somme,

⁽¹⁾ *Essai*, t. I, p. 420.

⁽²⁾ *Matérialisme*, p. 313.

que dans cet exemple le hasard résulte du mélange des genres. La géométrie a sa loi ; notre arithmétique a sa règle. Mais le résultat de l'association de cette règle et de cette loi — association qu'aucune raison n'impose — n'est plus qu'un fait contingent et porte la marque des faits contingents.

Renouvier a mis en doute l'exactitude du fait sur lequel s'appuie l'analyse de Cournot. Il a contesté que la distribution des chiffres présentât tous les caractères que laisserait prévoir la théorie des chances, à supposer qu'elle fût véritablement applicable. Il considère 150 chiffres ⁽¹⁾ et présente les remarques suivantes : « Si le lecteur veut bien dresser un tableau des nombres de fois que chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, etc., figure dans cette suite de chiffres selon qu'on s'arrête au dixième, au vingtième, au trentième, etc., et au cent cinquantième chiffre, il trouvera que la tendance à une égale distribution ne s'accuse point à mesure que l'on avance. Chaque chiffre ayant pour ainsi dire droit à sa moyenne de quinze apparitions sur cent cinquante, je remarque d'abord que, loin qu'il y ait plus de chiffres qui figurent précisément quinze fois qu'il n'y en a qui figurent quatorze ou seize fois et, à plus forte raison, plus de seize ou moins de quatorze fois, il n'y a qu'un seul chiffre qui figure précisément quinze fois. Au contraire, il y en a deux qui figurent quatorze fois, ce sont le 0 et le 5 ; et il y en a plus de deux, il y en a trois qui figurent moins de quatorze fois, ce sont le 1, le 6 et le 7. Enfin, il y a quatre chiffres dont les apparitions surpassent quinze fois, car le 3 et le 9 figurent dix-sept fois, et le 2 et le 8 figurent dix-neuf fois. *La conjecture de M. Cournot est aussi bien démentie que si un contradicteur eût pu arranger les chiffres au gré de son désir* Mais il y a plus ; le tableau des apparitions de chaque chiffre sur dix, vingt, trente chiffres considérés fournirait des arguments plutôt pour que contre la tendance de certains chiffres à revenir plus souvent que leur tour. Les chiffres 4 et 5 sont aussi ceux qui se tiennent le plus constamment rapprochés de la moyenne attendue des apparitions, à tel point que, sur les quinze fois, le chiffre 4 ne s'éloigne que deux fois de cette moyenne et cela d'une unité seulement. Le chiffre 3 se tient constamment au-dessus, le 0 et le 7 constamment au-dessous de cette moyenne ; le 2, le 8 et le 9 ne descendent jamais plus bas que l'égalité et semblent

(1) C'est au livre de Montucla Lalande [*Histoire des mathématiques*, t. IV, p. 640] qu'il emprunte l'expression de π avec 150 décimales.

à un certain moment tendre à s'élever rapidement » ⁽¹⁾. Enfin, Renouvier s'est donné la peine de traduire le nombre π en arithmétique binaire, et il a poussé la transformation jusqu'au cent quatorzième chiffre de ce système, pour observer si, dans cette nouvelle expression, qui ne contient plus que les symboles 0 et 1, on ne verrait pas se dessiner quelque loi syntaxique qui exclurait l'hypothèse du hasard. Il n'a pas découvert à vrai dire une telle loi. Mais le nombre π , considéré sous cette nouvelle forme, lui suggère à peu près les mêmes observations que tout à l'heure.

Il faut avouer cependant que l'argumentation de Renouvier manque tout à fait de rigueur ⁽²⁾. Pour bien le montrer, indiquons quels résultats nous permettrait d'attendre la théorie des chances si elle était applicable dans l'espèce.

La théorie des chances, sous sa forme algébrique, n'a rien de mystérieux. Elle n'est qu'un prolongement de l'analyse combinatoire. Supposez qu'avec nos dix chiffres nous formions tous les arrangements possibles de n éléments, de telle sorte que chacun des groupes différât des autres par la nature ou l'ordre des éléments et sans nous interdire d'ailleurs de répéter, dans chaque groupe, le même élément jusqu'à n fois. Comptons maintenant le nombre des chiffres 0, ou 1, ou 2, etc., qui figurent dans tel de ces groupes; soit N ce nombre; et divisons tous les groupes en deux classes, suivant que le nombre N relatif à chacun d'eux diffère ou non, en valeur absolue, du nombre $\frac{n}{10}$ d'une quantité inférieure à e . Cette différence absolue s'appelle écart. Soit M le nombre des groupes du premier genre et P le rapport de M au nombre total des groupes. Le calcul montre alors que, le rapport P restant constant, e croît proportionnellement à $\sqrt{n}$; $\frac{e}{n}$ décroît proportionnellement à $\sqrt{\frac{1}{n}}$. C'est la loi de l'écart, énoncée par Bernouilli. Si nous choisissons e assez grand, P pourra se rapprocher autant que nous le voudrions de l'unité. Mais en vertu de la loi de l'écart, si nous prenons le nombre n des éléments de chaque groupe assez grand, l'écart relatif $\frac{e}{n}$, qu'il est nécessaire de considérer pour que P se rapproche autant que l'on veut de l'unité, pourra devenir lui-même aussi petit qu'on le voudra.

⁽¹⁾ *Traité de logique générale*, t. II, p. 448.

⁽²⁾ Les arguments de Renouvier ont été discutés dans la *Revue néo-scholastique* de mai 1903, par M. Lechalas, qui considère lui aussi les 150 premières décimales. Nous sommes d'accord avec cet auteur sur un point : nous pensons comme lui que la loi des grands nombres se vérifie aussi bien que possible.

Les résultats que nous venons d'indiquer sont indiscutables; mais ils n'ont encore qu'un sens arithmétique. Pour les appliquer à la théorie des chances, il faut admettre et il suffit d'admettre que les événements considérés (soit par exemple dix événements représentés respectivement par les chiffres 0, 1, 2, etc.) sont des produits du hasard; et, qu'avant l'issue de l'épreuve, chacun d'eux était également possible. Alors, dans une série de n épreuves, chaque arrangement des dix événements, correspondant à un arrangement des dix chiffres de notre arithmétique, aura autant de chances de se présenter que tous les autres. Et nous aurons la probabilité P que l'écart relatif à l'un de ces événements sera inférieur ou égal à e .

On pourrait trouver bien d'autres propriétés de la série susceptibles d'une évaluation numérique, et telles qu'à chacune d'elles correspondit une loi d'écart. Nous pourrions par exemple considérer la moyenne de la somme de tous les chiffres; ou encore le nombre de fois qu'un chiffre de la suite est soit inférieur, soit supérieur à celui qui le précède; ou diviser les chiffres en deux groupes, de 0 à 4, par exemple, et de 5 à 9, et noter combien de fois un chiffre est suivi d'un autre chiffre appartenant au même groupe que lui; ou bien encore compter la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair, etc. On multiplierait autant qu'on le voudrait les points de vue. On obtiendrait autant d'épreuves du hasard qui ne seraient d'ailleurs pas absolument indépendantes les unes des autres. Mais il ne faut pas oublier que, dans chacun de ces calculs, la probabilité que l'on obtient est relative à la fois à la grandeur de l'écart et à l'étendue de la suite considérée. Faute d'évaluer cette probabilité, Renouvier ne présente qu'une argumentation très vague et peu décisive. Ses conclusions manquent même tout à fait d'exactitude. On ne doit pas oublier non plus qu'en multipliant indéfiniment les épreuves auxquelles on soumet la loi des grands nombres pour une même suite d'événements fortuits, on a des chances de plus en plus grandes de la trouver en défaut. Si nous avons une probabilité x (x nécessairement plus petit que 1) qu'elle satisfera à l'une quelconque de ces n épreuves, nous n'avons plus qu'une chance x^n qu'elle satisfera à toutes.

En tenant compte de ces remarques et en prenant l'expression de π , donnée par Shanks, avec 530 décimales⁽¹⁾, nous avons cons-

(1) Shanks a calculé les 530 premières décimales de π . L'exactitude des 440 premiers chiffres est confirmée par un calcul antérieur de Rutherford, lequel lui-

taté nous-même que la suite de ces chiffres vérifie de façon satisfaisante les règles d'écart que nous fournit la théorie des chances, dans le cas où l'on assimile la valeur de chacun d'eux au résultat d'un tirage fortuit ⁽¹⁾. Sur ce point nous devons donner raison à Cournot. Mais on ne peut rien en conclure en faveur de sa thèse, et le succès de cette épreuve n'est encore qu'un argument négatif. Si, en effet, des chiffres pris au hasard en assez grand nombre sont placés à la suite les uns des autres dans l'ordre où ils ont été obtenus, il est *à priori* probable que cette série présentera les caractères de fortuité prévus par la théorie des chances. Mais qu'une suite de chiffres dont nous ignorons l'origine présente ces caractères, nous n'avons pas le droit de considérer comme probable qu'elle soit un effet du hasard. Ce serait « une réciproque tirée par inadvertance ». Renouvier l'a fait remarquer avec raison. En effet, le mot probabilité n'aurait même plus de sens dans cette nouvelle application; du moins il ne serait plus relatif qu'à notre ignorance, puisqu'une telle suite a été ou n'a pas été engendrée par des causes fortuites et qu'il n'y a pas d'intermédiaire possible. La loi des grands nombres s'applique aux produits du hasard; mais elle ne les caractérise pas absolument, car elle ne s'applique pas à eux seuls.

Nous ne pouvons donc pas nous appuyer sur des preuves empiriques pour résoudre le curieux problème posé par Cournot. Il faut recourir à une analyse abstraite. Or, celle que nous propose Cournot lui-même présente une grave ambiguïté et, tant qu'on ne la dissipe pas, sa conclusion paraît tout à fait paradoxale. Nous allons essayer de dévoiler ce paradoxe.

La valeur de chaque chiffre dans l'expression décimale de π est déterminée par des raisons mathématiques absolues; elle résulte nécessairement de la nature de la grandeur à mesurer et des règles de notre arithmétique. Tous les chiffres ont leur place marquée; et cependant Cournot n'hésite pas à dire qu'ils se suivent sans loi. C'est qu'il donne à ce mot un sens très particulier.

La loi est l'ordre de la succession régulière. Si nous convertissons, par exemple, la fraction $\frac{1}{7}$ en fraction décimale, les chiffres se reproduiront périodiquement par séries de six, et il suf-

même concordait jusqu'à la 330^e décimale avec celui de Richler (voy. *Nouv. Ann. de math.*, t. XV, p. 209, 1855; t. XIII, p. 418, 1854; t. X, p. 198, 1851 et t. IX, p. 12, 1850).

⁽¹⁾ Voy. une note à la fin de l'ouvrage où nous avons consigné les principaux résultats de ce calcul.

fira de connaître les six premiers pour pouvoir écrire les autres sans calcul nouveau ⁽¹⁾. Il n'en va plus de même dans l'expression décimale de π . Nous ne possédons aucune règle syntaxique de laquelle nous puissions déduire l'arrangement des chiffres de la suite indéfinie, en sorte que nous formerions celle-ci sans plus avoir besoin de considérer la grandeur à mesurer. On ne doit pas en être surpris. Il n'y a, *a priori*, aucune raison de penser que la mesure de la circonférence, figure géométriquement simple, puisse s'exprimer, dans notre système de numération, par un arrangement simple de symboles. Sur ce point, l'explication donnée par Cournot peut nous satisfaire. Les principes de notre arithmétique décimale sont tout à fait *indépendants* de ceux de la géométrie; l'expression numérique que nous obtenons par l'emploi de nos signes est en un sens artificielle. Par conséquent, nous ne devons pas nous attendre à trouver en général une correspondance entre ce qui est géométriquement simple et ce qui est simple dans notre traduction arithmétique. Cournot est donc autorisé à dire, en un sens, que la suite des chiffres, dans la fraction décimale qui mesure π , « n'est pas propre à nous donner l'idée d'une loi, qu'elle nous donnerait seulement l'idée d'un fait, lequel appartient, il est vrai, à l'ordre des faits purement intelligibles, rationnels et nécessaires » ⁽²⁾.

Mais, parce que cette suite est irrégulière, il conclut qu'on peut l'assimiler à un tirage fortuit et qu'elle nous offre un exemple de l'action du hasard dans l'ordre rationnel. Nous ne pouvons accepter cette interprétation. Faisons d'abord une remarque. La série est irrégulière. Mais, en un sens, ce serait la preuve manifeste qu'elle n'est pas un produit du hasard. Car elle est *nécessairement* irrégulière, ou du moins ne présente certainement pas le type le plus simple de régularité, puisque π étant un nombre incommensurable, nous savons *a priori* qu'il n'est pas représenté par une fraction périodique. Or, d'une série de faits réellement fortuits, on ne peut, par hypothèse, rien dire avec certitude. Il est probable qu'elle sera irrégulière; il n'est pas nécessaire qu'elle le soit. D'ailleurs, on pourrait trouver bien des exemples de distributions irrégulières, auxquelles il serait impossible d'attribuer le caractère de la fortuité. Considérons les 10.000 premiers logarithmes que nous trouvons dans une table, et dans chacun d'eux les troisièmes chiffres décimaux. Au sens que Cournot donne à ce

⁽¹⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 63.

⁽²⁾ *Enchaînement*, t. I, p. 64.

mot, ils se succèdent sans aucune loi. Or, on peut non seulement constater, mais démontrer que l'écart entre le nombre des chiffres pairs et celui des chiffres impairs est très petit. « Ecrivons 10.000 nombres, correspondant à nos 10.000 logarithmes; chacun de ces nombres étant égal à $+1$ si la troisième décimale du logarithme correspondant est paire, et à -1 dans le cas contraire. Prenons ensuite la moyenne de ces 10.000 nombres..... On peut démontrer rigoureusement que cette moyenne est plus petite que 0,003 » ⁽¹⁾. Or, pour l'établir, il suffit de s'appuyer sur deux faits, à savoir que les dérivées premières et secondes du logarithme restent, dans l'intervalle considéré, comprises entre certaines limites. « D'où cette conséquence que la propriété est vraie, non seulement du logarithme, mais d'une *fonction continue quelconque* puisque les dérivées de toute fonction continue sont limitées ». La possibilité d'une pareille démonstration, applicable à toute fonction continue, exclut l'idée d'un arrangement fortuit, à moins que le mot fortuit ne perde tout à fait son sens habituel et ne désigne plus que l'arrangement vérifiant une loi d'écart. Nous trouvons, en effet, dans les propriétés générales de la fonction, la raison — au sens que Cournot lui-même donne à ce mot — de la répartition des chiffres, ou du moins d'un des caractères de cette répartition ⁽²⁾. Par conséquent, il ne faudrait pas se hâter de conclure qu'une suite d'événements est un résultat du hasard, ou assimilable à un

⁽¹⁾ Poincaré, *La science et l'hypothèse*, p. 224. — Pour le calcul, voir *Revue générale des sciences*, « Réflexions sur le calcul des probabilités », avril 1899.

⁽²⁾ M. Mansion, dans un discours prononcé à l'Académie royale de Belgique (16 décembre 1903) sur la *Portée objective du calcul des probabilités*, a opposé cet exemple à Cournot; en lui attribuant, nous semble-t-il, plus de portée qu'il n'en a. M. Lechallas *Hasard et déterminisme*, *Rev. de mét. et de mor.*, janv. 1906), qui d'ailleurs défend la théorie de Cournot contre les objections de M. Mansion, pense toutefois que cet exemple aurait pu causer quelque embarras à notre philosophe. Nous ne le croyons même pas. Cournot eût pu se borner à répondre que dans la mesure où la distribution des chiffres résulte seulement du caractère de la fonction logarithmique et non « du mariage de deux arithmétiques », on ne doit plus y voir une manifestation du hasard. Il aurait donc conclu simplement qu'un tel exemple n'était pas propre à illustrer sa théorie. M. Mentré (*Hasard et déterminisme*, *Rev. de mét. et de mor.*, mai 1906) soutient lui aussi que Cournot n'eût éprouvé aucun embarras. Mais il en donne une raison bien surprenante. D'après lui, la répartition des chiffres, dans la colonne des troisièmes décimales des 10.000 premiers logarithmes, présente, en dépit de la démonstration de M. Poincaré, tous les caractères de la fortuité. Non! puisque la forme de la répartition est, en partie du moins, la conséquence d'un caractère général de la fonction, Cournot ne l'eût pas assimilée à un fait aléatoire. Nous concluons simplement de cet exemple, pour notre part, que la loi des grands nombres ne suffit pas à caractériser les produits du hasard, parce qu'elle ne s'applique pas à eux seuls.

tel résultat, parce qu'elle ne présente pas l'aspect de la régularité. Ce serait une application très incorrecte du calcul des chances. Or, il semble bien que Cournot soit tombé dans cette erreur.

Recherchons maintenant, en effet, par une analyse directe, si la distribution des chiffres dans l'expression décimale de π peut être comparée à un événement fortuit. L'événement fortuit est celui qui se réalise seul parmi d'autres événements également possibles; celui qui, avant l'épreuve, n'avait que des chances de se produire. Alors sa probabilité est « le rapport du nombre des chances favorables au nombre total des chances » : c'est la définition même de Cournot dans l'« Exposition ». Or, on s'aperçoit sans peine qu'on ne peut l'appliquer à notre suite de chiffres. Insistons sur ce point qu'il importe de bien préciser.

Nous savons que le nombre qui mesure le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre 3 et 4, et nous savons, de plus, qu'il est incommensurable. Pour trouver, avec une approximation de $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, les parties décimales de tous les nombres incommensurables plus grands que 3 et plus petits que 4, il suffit de former tous les arrangements possibles, par groupes de n , des dix chiffres de notre arithmétique. Si n croissait sans cesse, la proportion de ces groupes où le nombre d'apparitions de chaque chiffre approcherait de $\frac{n}{10}$ croîtrait elle-même indéfiniment. C'est là, en effet, une application immédiate de la loi des grands nombres. Mais ceci revient à dire que, dans l'expression décimale de la plupart des nombres incommensurables compris entre 3 et 4, la suite des chiffres vérifie de façon satisfaisante les règles d'écart. La classe de ces nombres incommensurables serait d'ailleurs d'autant plus considérable, par rapport à la classe opposée, que l'on prendrait n plus grand, c'est-à-dire que l'on poursuivrait une approximation plus grande dans l'expression décimale, et l'on pourrait la rendre aussi prépondérante qu'on le voudrait. De laquelle de ces classes fait partie le nombre π ? *A priori* nous ne pouvons pas le dire, ou, du moins, dans l'état actuel de nos connaissances, aucune méthode mathématique générale ne permet de l'établir. Il reste à faire le calcul des chiffres décimaux. Sans doute, si celui-ci nous montre que π appartient à la classe la plus nombreuse, c'est-à-dire que dans son expression décimale les chiffres sont distribués comme au hasard, nous n'aurons pas lieu d'en être surpris. Mais dira-t-on que ce résultat était *à priori* très probable et que π avait plus de chances d'appartenir à

la classe la plus nombreuse ? Ce serait une application bien illogique du calcul des chances ; ou, du moins, de toute évidence une telle probabilité resterait, comme celle de Laplace, entièrement relative à notre ignorance. Pour appliquer la théorie de la probabilité à cet étrange problème, il faudrait supposer que tous les arrangements de chiffres susceptibles de former un nombre décimal sont également possibles, et peuvent être également attendus comme résultats du calcul ; ce qui voudrait dire simplement que nous sommes également incertains à l'égard de chacun d'eux, et que rien ne nous porte à croire, tant que le calcul n'est pas encore effectué, que l'un convient plutôt que l'autre. Le calcul d'une telle probabilité mérite bien d'ailleurs le nom qu'on lui a donné de « calcul des illusions ». Il a pour objet « de mesurer le degré d'impossibilité des choses certaines et le degré de possibilité des choses impossibles ». Bref les nombres décimaux qui mesurent π ou e sont ce qu'ils sont et ne peuvent pas être autre chose. On les obtient par un calcul absolument déterminé, et dont le résultat ne donne aucune prise au hasard. La disposition des chiffres dans ces expressions est une vérité éternelle où l'on ne peut, sans folie, chercher la moindre trace de contingence.

Telle est la conclusion qui s'impose inévitablement. Et l'on ne comprendrait pas du tout l'interprétation de Cournot, si l'on ne remarquait que le problème de probabilité peut se poser sous une autre forme, très différente il est vrai, mais que Cournot — tout le paradoxe vien de là — a le tort de ne pas distinguer de la première. Jusqu'ici nous nous demandions quel était le degré de possibilité ou d'impossibilité d'un fait absolument nécessaire. On ne pouvait alors parler que d'une probabilité subjective. Si Cournot n'en convient pas, c'est qu'il transforme à son insu, dans la discussion, la question précise que nous avons posée en une autre question entièrement nouvelle, quoique son énoncé littéral demeure à peu près le même.

L'expression de π dans un système de numération déterminé est déterminée sans ambiguïté et ne peut donner lieu au calcul des chances. Mais l'expression de π dans le système de numération que devait adopter l'Europe moderne peut être considérée comme un fait contingent, puisque ce choix lui-même ne s'imposait pas, et que d'autres méthodes eussent pu être élues. Le problème de la numération consiste à représenter un nombre entier quelconque au moyen d'un nombre fini de symboles convenablement combinés. La méthode que nous avons héritée des Arabes repose sur

le principe des bases et celui de la position. On ramène le nombre que l'on veut écrire à une somme de termes de la forme :

$$a + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p$$

de manière à ne faire usage que d'un nombre de chiffres égal à $(n - 1)$. Le rang occupé dans l'expression numérique par chaque chiffre indique la puissance de n par laquelle il faut le multiplier. Mais on aurait pu, à la rigueur, trouver d'autres règles, quoique celles des Arabes paraissent certainement les plus simples et les plus naturelles. Du moins le choix d'une base particulière ne pouvait être qu'un acte partiellement arbitraire, et il était certainement permis d'en adopter une autre que le nombre 10, de construire par exemple une arithmétique binaire, ou une arithmétique duodécimale. Dans chacun de ces systèmes, un nombre incommensurable comme π aurait été représenté avec une approximation croissante par une suite indéfinie de symboles; et, dans certaines de ces suites sinon dans toutes, les symboles se seraient succédé de façon irrégulière, offrant ainsi le caractère apparent de la fortune. On comprend dès lors quel problème pourrait se poser. On pourrait sans absurdité se demander quelles chances il y avait *a priori* pour que, dans notre méthode de numération, la distribution des symboles nécessaires à l'expression de telle grandeur incommensurable vérifiât la loi des écarts. En effet, plusieurs hypothèses étaient possibles, puisque plusieurs systèmes de numération pouvaient être adoptés et que chacun devait donner une forme différente à l'expression numérique de la grandeur. Pour résoudre ce problème, il faudrait tenir compte de la probabilité de chacune de ces hypothèses et de son influence sur le résultat du calcul. Bien entendu, une pareille question est beaucoup trop complexe pour que nous soyons capables de l'aborder. Les données mêmes nous échappent. Mais il n'en reste pas moins vrai qu'elle a un sens intelligible. Il se pourrait d'ailleurs que, pour tous les systèmes de numération que les peuples civilisés étaient susceptibles de choisir, l'expression de π ou de e dût présenter, dans la répartition de ses chiffres, les signes habituels du hasard. Mais il ne faudrait pas en conclure que cette répartition pourrait être assimilée à celle qui résulte d'un tirage fortuit. Bien au contraire, puisque ce caractère se retrouverait dans toutes les hypothèses possibles, c'est qu'il serait absolument nécessaire. Il serait nécessaire que la succession des chiffres imitât le hasard.

Si Cournot prétend appliquer le concept du hasard à l'ordre des

faits intelligibles et rationnels, c'est qu'il confond deux problèmes dont l'un — pour employer le langage de Leibnitz — concerne les *essences*, et l'autre les *existences*. Les propositions relatives aux essences sont, comme le dit Leibnitz, toujours conditionnelles. Elles n'affirment pas catégoriquement : A est B, mais seulement : « telle chose étant posée, telle autre est. Par exemple disant : toute figure qui a trois côtés, aura aussi trois angles ». Elles expriment seulement que nous saisissons un prédicat dans le concept d'un sujet [*Prædicatum inest subjecto*], de quelque manière d'ailleurs que celui-ci ait été formé et eût-on rassemblé de la façon la plus arbitraire les éléments qui le composent ; eût-il été « fabriqué exprès » pour la déduction qu'on se propose. Il en résulte que les propositions touchant les essences ont toujours une forme nécessaire. Et ce serait folie de chercher un caractère de contingence, une trace du hasard dans les rapports qu'elles expriment et qui sont entièrement rationnels. Toutes les propositions mathématiques sont de cette espèce. En particulier l'expression numérique d'une grandeur donnée, dans un système donné, est ce qu'elle est ; elle résulte nécessairement de la définition de cette grandeur et des conventions de ce système. Elle représente la solution inévitable d'un problème entièrement déterminé. De ce point de vue nous n'avons certainement pas le droit d'assimiler à une combinaison du hasard la distribution des chiffres dans l'expression décimale de π ou de e . Le calcul par lequel s'obtient la valeur de chacun d'eux s'effectue sans ambiguïté. Le résultat en était fixé de tout temps, et avant que nous ayons pu le connaître. C'est, répétons-le, une vérité éternelle, comme d'ailleurs toutes les vérités qui concernent les essences. Que le système de la numération décimale soit indépendant de la nature de la grandeur à mesurer, cette circonstance importe peu : elle ne saurait avoir aucune influence sur la modalité de la proposition conditionnelle. Celle-ci se borne à rattacher un prédicat à un sujet ; et la nécessité du rapport qu'elle énonce n'est pas moins forte parce que le concept du sujet est formé d'éléments qui ne sont point absolument solidaires.

Au contraire des propositions conditionnelles, rien n'empêche que les propositions existentielles ne soient aléatoires. Du moins nous n'avons *a priori* aucune raison de le nier. Toutes les essences ne se réalisent pas ; tous les possibles ne passent pas à l'existence. Il peut y avoir compétition entre plusieurs d'entre eux ; et, dans cette espèce de lutte pour la vie, le succès ne se détermine peut-être que par l'événement, par l'acte d'une causalité libre,

sans qu'aucune loi générale puisse permettre de le prévoir. Nous avons déjà dit que la volonté humaine semblait nous offrir l'exemple le plus frappant de ce mode de causalité; aussi est-ce dans les actes émanant d'elle qu'il nous est le plus facile de concevoir l'intervention du hasard. Sans doute, les exemples présentés par Cournot semblent à première vue contredire cette affirmation, quand il les emprunte à l'ordre rationnel. Mais il ne faut pas se laisser tromper par cette dernière expression qui est équivoque. En dernière analyse, le seul événement véritablement aléatoire qu'il puisse invoquer dans l'interprétation de ces exemples, c'est le choix d'un système arithmétique et, par conséquent, un fait psychologique et social, où la volonté humaine a trouvé peut-être l'occasion de s'exercer. Mais nous ne voulons point ici opposer une théorie du hasard à une autre. Toujours est-il que, pour faire à la contingence une place dans le monde, il faut bien admettre qu'à un moment quelconque, soit dans le cours du temps, soit à l'origine du temps, plusieurs possibles qui n'étaient pas compossibles ont prétendu également à l'être, sans qu'aucune raison déterminante en fit prévaloir aucun, en sorte que la réalisation de l'un d'entre eux au détriment des autres ne s'explique pas, mais se constate. Sans cette hypothèse, le terme de chances n'aurait aucun sens, du moins aucun sens objectif, puisque les chances d'un événement sont inversement proportionnelles au nombre des événements qui peuvent se produire au même titre que lui.

Cournot raisonne à peu près ainsi. Dans l'ordre des choses rationnelles, absolument intelligibles et nécessaires, je découvre les caractères habituels de la fortuité, toutes les fois qu'elles résultent de deux groupes de raisons indépendantes. Le hasard n'implique donc pas l'indétermination, mais l'indépendance; il n'est pas l'absence de causes ou de raisons décisives, mais l'absence de solidarité. Mais, pour soutenir cette thèse paradoxale et trouver dans la distribution des chiffres de π les caractères contradictoires de la détermination rigoureuse et de la fortuité, il se place tour à tour, dans l'examen de cet exemple, à deux points de vue différents : d'abord celui de l'essence, puis celui de l'existence.

Les vérités relatives aux essences s'expriment par des propositions conditionnelles, lesquelles rattachent un prédicat à un sujet qui le contient et portent la marque de la nécessité la plus forte : la nécessité logique. On retrouve ce caractère dans tous les jugements mathématiques, et en particulier dans le jugement suivant : si vous mesurez le rapport de la circonférence au diamètre

dans le système décimal les chiffres se succéderont dans l'ordre : 3,1416, etc. Les vérités relatives aux événements fortuits, s'il en est de tels dans le monde, s'expriment par des propositions disjonctives ; et la forme même de ces propositions nous avertit que les événements aléatoires restent, avant l'issue de l'épreuve, indéterminés et se produisent, nous ne dirons pas sans cause, mais sous l'influence de certaines causes dont l'action demeure ambiguë jusqu'à la fin. L'expression de π , par exemple, que la veuve de Ludolph van Ceulen fit graver sur la tombe de son époux, peut passer pour un symbole accidentel de la grandeur géométrique, puisqu'il n'était pas nécessaire que ce calculateur persévérant se servit de la méthode décimale. Grâce à la distinction que nous venons de faire, nous apercevons clairement que les caractères de la nécessité et de la fortuité ne peuvent point appartenir au même objet. Et si Cournot les associe, c'est qu'il change de point de vue dans son commentaire. Dans la question qui nous occupe, c'est chose bien différente de dire : l'expression de π dans le système de la numération décimale, ou l'expression de π dans le système numérique qu'adoptera l'Europe moderne. Dans le premier cas, je me donne tous les termes du problème et la solution ne peut être que ce qu'elle est. Dans le second cas, une certaine indétermination subsiste dans l'énoncé, tant que je n'ai point appris par l'observation quel système a été choisi en fait. La première question seule concerne l'ordre rationnel où tout est déterminé ; la seconde touche à certains faits d'expérience que l'on peut traiter de contingents. Pour passer de l'une à l'autre il ne faut changer que peu de termes dans l'énoncé. Aussi ce changement risque-t-il de passer inaperçu. C'est pour n'y avoir pas pris garde que Cournot s'est efforcé de concilier des idées contradictoires dans sa théorie du hasard.

Nous avons relevé dans la théorie de ce philosophe, apparemment si claire, bien des confusions et des ambiguïtés. Si Cournot les a laissées subsister, c'est qu'il n'est pas dans le caractère de son esprit de pousser jusqu'au bout l'analyse métaphysique de ses idées. En outre, il nous semble qu'une erreur principale domine sa théorie du hasard. Ce philosophe a cru qu'il pourrait retrouver dans un monde absolument intelligible, et dont l'évolution ne réserverait aucune surprise à la raison souveraine, le caractère de la contingence, s'il opposait le hasard, non plus à la nécessité, mais à la solidarité. Mais il ne s'est point demandé si ces deux conditions se distinguaient réellement l'une de l'autre. En quel sens pourrait-on dire que les lois de la nature sont néces-

saïres, si elles n'entraient pas toutes dans un même système, si elles ne formaient pas un tout organique dont les parties se réclameraient les unes les autres, si elles n'étaient pas solidaires ! Mais n'oublions pas que la méthode de Cournot est celle de l'induction. Il découvre dans les phénomènes des relations si simples que la raison croit se reconnaître en elles, et il établit, par certaines considérations de probabilité, qu'il ne faut point les attribuer au jeu du hasard, mais qu'elles dérivent de la nature des choses. L'expérience lui enseigne que les faits sont régis par des lois. Mais il ne se demande point, et sa méthode ne lui permet pas de se demander, pourquoi ces lois les régissent. Aussi ne s'élève-t-il pas à l'idée du système qu'elles forment. Au contraire, comme il les a obtenues par des expériences séparées et qu'il ne peut pas les déduire toutes les unes des autres, ou les ramener toutes à une formule unique, elles lui apparaissent comme réellement indépendantes, encore que chacune d'elles soit nécessaire. Chacune d'elles représente comme un décret distinct, quoique chaque décret soit irrévocable. Alors, pour définir le hasard et pour lui assigner une place dans le gouvernement du monde, on peut se contenter de nier la solidarité des causes et des raisons, sans qu'on cesse d'affirmer la force nécessitante de chacune d'elles. Mais nous croyons qu'une théorie plus approfondie de la connaissance découvrirait l'inanité de cette conclusion. Une philosophie idéaliste pleinement consciente d'elle-même ⁽¹⁾ verrait dans les lois nécessaires, en tant justement qu'elles sont nécessaires, les pièces solidaires d'une même construction rationnelle.

(1) Celle, par exemple, de notre regretté maître O. Hamelin.

Note sur la distribution des chiffres dans l'expression décimale de π .

Renouvier a contesté à Cournot que la suite des chiffres, qui figurent dans l'expression décimale de π , présentât les caractères de la fortuité. Mais nous avons dit que son argumentation manquait de rigueur et d'exactitude. Il considère 150 chiffres, et remarque, par exemple, que le nombre d'apparitions de 3 chiffres (le 2, le 8 et le 7) s'écarte de plus de 3 unités de la moyenne théorique qui est 15. Mais faute de calculer la probabilité de l'écart, il n'est pas en état d'apprécier la signification de ce fait. Or le calcul montrerait que la probabilité d'un écart égal ou inférieur à 3 n'atteint pas $\frac{2}{3}$. Par conséquent il est tout à fait conforme aux prévisions de la théorie des chances que, sur les 10 chiffres considérés, il s'en trouve 3, c'est-à-dire à peu près un tiers, pour lesquels cette limite d'écart soit dépassée.

Shanks a poussé le calcul de π jusqu'à la 530^e décimale. L'exactitude de son travail est confirmée jusqu'au 440^e chiffre par les résultats d'un calcul antérieur de Rutherford. Le tableau suivant, dressé pour faciliter au lecteur l'examen direct de la question, résume les écarts absolus manifestés par chaque chiffre arithmétique, dans chaque tranche de 100, 200, 300 décimales, etc. Les signes $+$ ou $-$ indiquent que les écarts sont positifs ou négatifs, c'est-à-dire doivent s'ajouter à la moyenne théorique, ou se soustraire, pour obtenir le nombre réel des apparitions.

NOMBRE des chiffres décimaux.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SOMMES des écarts absolus.
100	-2	-2	+2	+1	0	-2	-1	-2	+2	+4	18
200	-1	0	+4	-1	+2	0	-4	-8	+5	+3	28
300	-4	0	+5	+1	+7	-3	+1	-11	+4	0	36
400	-1	+3	+4	-1	+7	-1	+2	-16	+4	-1	40
500	-5	+9	+4	0	+3	0	-2	-14	+3	+2	42
530	-5	+7	+3	+3	+4	-2	+1	-16	+4	+1	46

Les remarques suivantes seront peut-être utiles pour interpréter ce tableau. La probabilité d'un écart inférieur à 5 se rapproche de $\frac{1}{2}$. Or il y a 7 chiffres pour lesquels l'écart n'atteint pas 5. Le seul écart un peu considérable est celui du chiffre 7, qui est égal à 16 en valeur absolue. La probabilité d'un écart inférieur à 16 est approximativement $\frac{978}{1000}$. Cela veut dire que, dans l'hypothèse d'un tirage fortuit, et en répétant 1.000 fois l'épreuve du hasard, nous trouverions, en général, pour chaque chiffre, dans 22 de ces épreuves, un écart plus grand que 16. Pour les dix chiffres arithmétiques, il y aurait, dans les 1.000 épreuves, 220 exemples d'écarts supérieurs à 16 unités. On peut en conclure que, dans une seule épreuve, il y a presque une chance sur quatre que le nombre d'apparitions d'au moins un chiffre s'éloigne d'au moins 16 unités de la moyenne théorique. L'écart constaté pour le chiffre 7 n'aurait donc rien de surprenant, à supposer même que l'on assimilât au résultat d'une épreuve aléatoire la succession des chiffres dans l'expression de π .

Notons enfin que la somme des écarts absolus croît sans cesse, à mesure que l'on considère un plus grand nombre de chiffres décimaux, mais beaucoup plus lentement que ce nombre. Elle croît en réalité un peu plus vite que la racine carrée du nombre des chiffres décimaux ; mais la différence est petite et tend d'ailleurs à diminuer. Le tableau suivant permettra la comparaison :

NOMBRE des chiffres décimaux.	RACINES carrées.	SOMMES des écarts absolus.	NOMBRES proportionnels aux racines carrées.	DIFFÉRENCES
100	10	18	18	
200	14,15	28	25,47	2,53
300	17,32	36	31,17	4,83
400	20	40	36	4
500	22,36	42	40,25	2,25

Le résultat est bien conforme aux prévisions de la théorie des chances.

Si nous considérons maintenant la distribution des chiffres pairs et impairs, en considérant le zéro comme pair eu égard à

son rang, nous trouvons que les premiers paraissent 272 fois et les seconds 258 fois. L'écart absolu est donc en fait de 7. Le calcul montrerait que, dans l'hypothèse d'une répartition fortuite, la probabilité d'un écart inférieur à 7 n'atteindrait pas $\frac{1}{2}$. De ce point de vue encore, la série des chiffres décimaux offre donc bien l'apparence de la fortuité.

Nous avons cherché, enfin, combien de fois dans la série un chiffre était suivi d'un chiffre de même parité, d'un chiffre pair s'il est lui-même pair, d'un chiffre impair s'il est impair. Il nous a semblé, en effet, que cet examen était assez propre à mettre en évidence le caractère irrégulier de la série, puisqu'au lieu de mesurer le nombre brut des présences de chaque chiffre, on observe comment ils alternent. On peut d'ailleurs varier l'épreuve, en la faisant porter soit sur les chiffres qui se suivent directement, soit sur ceux qui se suivent à un intervalle de 1 rang ou de 2 rangs, etc. Nous avons obtenu les résultats suivants pour 500 chiffres :

Nombre des chiffres suivis d'un chiffre de même parité directement	262. Ecart + 12
Nombre des chiffres suivis d'un chiffre de même parité à un intervalle d'un rang	259. Ecart + 9
Nombre des chiffres suivis d'un chiffre de même parité à un intervalle de deux rangs	251. Ecart + 1

La moyenne théorique est 250, puisque chaque chiffre, dans un tirage fortuit, aurait 1 chance sur 2 d'être suivi d'un chiffre de même parité. L'écart le plus grand est 12. Or la probabilité d'un écart inférieur à 12 serait d'environ $\frac{7}{10}$.

On obtiendrait la même conclusion, si l'on comptait le nombre des chiffres suivis d'un chiffre de même nom (par exemple le 0 d'un 0, le 1 d'un 1, etc.). Seulement, plus on multiplie les points de vue sous lesquels on considère la même série de faits fortuits, de façon à vérifier sur elle un plus grand nombre de règles d'écart, plus on risque de la trouver en défaut. Car, s'il est probable qu'elle vérifie chacune de ces règles prise à part, il l'est moins qu'elle les vérifie toutes à la fois. On doit donc finir par rencontrer à la longue quelque anomalie. Mais c'est une anomalie en quelque sorte prévue. Si donc la suite des chiffres décimaux dans l'expression de π en présente elle-même certaines, on n'a pas le droit de tirer argument de ce fait. En comptant, par exemple, parmi les 530 premiers chiffres décimaux le nombre de ceux qui, à un intervalle de deux rangs, sont suivis d'un chiffre de même nom, nous trou-

vons qu'il n'y en a que 37. La moyenne théorique serait de 53; l'écart est donc de 16. C'est un écart considérable et inattendu dans l'hypothèse du hasard, puisqu'il y aurait 98 chances sur 100 qu'il fût inférieur à ce nombre. Mais, nous le répétons, il est probable que les règles de la probabilité ne se vérifient pas toutes dans le cas même d'une série véritablement fortuite.

Ainsi donc la suite des chiffres décimaux, dans l'expression du nombre π , présente bien tous les caractères prévus par la théorie de chances. Sur ce point, il faut donner raison à Cournot contre Renouvier. Mais ce fait est sans portée, et Cournot, à son tour, ne peut s'en prévaloir dans sa définition du hasard. Si, en effet, les règles d'écarts s'appliquent aux événements qui sont le produit du hasard, elles ne s'appliquent pas à eux seuls et ne les caractérisent pas définitivement.

Vu : le 26 janvier 1910,
Le Doyen de la Faculté des Lettres
de l'Université de Paris,
A. CROISSET.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
L. LIARD.

